ریاضی و کاربرد آن در مدیریت

2-3
5
12

حاصلضرب دکارتی یا کارتزین

www.uast.ac.ir
آموزشکده ...

فرض کنید A و B دو مجموعه باشند. حاصلضرب دکارتی A.B به صورت زیر می‌باشد

$$A.B = \{ (x,y) \mid x\in A ,\ y\in B \}$$

$$A=\{a,b,c\} \qquad B=\{2,4\}$$

$$A\times B = \{ (a,2),(a,4),(b,2),(b,4),(c,2),(c,4) \}$$

هر زیرمجموعه از حاصلضرب دکارتی را یک رابطه گویند

تابع:

رابطه f از A.B را تابع گوییم هرگاه $\begin{cases}(a,b)\in f\\(a,c)\in f\end{cases} \Rightarrow b=c$ باشد

$$f_1 = \{ (1,4),(1,2),(3,7) \} \quad ?$$

$$f_2 = \{ (1,4),(7,5),(1,4) \} \quad ?$$

به طور حس هرگاه خطی موازی محور y ها رسم کنیم اگر نمودار را در بیشتر از یک نقطه قطع کند
نمودار تابع نیست

دامنه:

اگر رابطه f تابع باشد در مجموعه‌ی مختص‌های اول آن، حوزه f یا قلمرو f و یا دامنه f (Domain) D_f می‌گویند و به مختص‌های دوم آن برد تابع یا (Range) R_f گویند.

به عبارت دیگر به مجموعه x هایی که به ازای آنها y پیدا شود دامنه تابع و به مجموعه y هایی که به ازای آنها x وجود داشته باشد برد تابع گویند.

$\frac{۲}{a}$

مثال: دامنه و برد تابع زیر را بدست آورید.

$f = \{(x,y) \mid 1 \leq x \leq ۲۰ \ , \ y = ۳x+1 \ , \ x \in N\}$

چند جمله‌ای یا خطی - کسری - رادیکالی و کمانی

توضیح: برای بررسی دامنه توابع جبری، توابع را به چهار نوع

تقسیم می‌کنیم.

۱- توابع چند جمله‌ای یا خطی:

دامنه این توابع اعداد حقیقی (R) می‌باشد.

$D_f = R$ یا $D_f = (-\infty , +\infty)$

$y = ۵x^۳ + ۷x + ۲$ $\quad D_f = R$

$y = \sqrt{۲}\, x^۲ + \sqrt{۳}\, x + 1$ $\quad D_f = R$

۲- توابع کسری:

دامنه این توابع، اعداد حقیقی (R) است به جز مقادیری که مخرج کسر را صفر می‌کند.

$D_f = R - \{$ ریشه‌های مخرج $\}$

مثال: دامنه توابع زیر را بدست آورید.

$y = \dfrac{x^۵ + x^۸ + x - 1}{x^۲ - ۵x + ۶}$ $\quad D_f = R - \{۲ , ۳\}$

$y = \dfrac{۳x}{x^۲ - ۴} \Rightarrow$ $\quad D_f = R - \{-۲ , ۲\}$

$y = \dfrac{x - ۴}{\dfrac{x - ۳}{x + ۸}}$ $\quad D_f = R - \{۳\}$

۳/۵

توابع رادیکالی :

توابع رادیکالی به دو نوع تقسیم می شوند : ۱- توابع رادیکالی با فرجه زوج ۲- توابع رادیکالی با فرجه فرد

۱- توابع رادیکالی با فرجه زوج : برای تعیین دامنه این توابع ، زیر رادیکال باید بزرگتر یا مساوی صفر باشد

برای این کار زیر رادیکال را تعیین علامت می کنیم

مثال : دامنه تابع $y=\sqrt{x+1}$ را پیدا کنید

$$x+1=0 \Rightarrow x=-1$$

x		-1	
$x+1$	$-$	0	$+$

$[-1,+\infty)$

$$y=\sqrt{\frac{x-1}{x^2-4}}$$

$x=1$

$x=-2,2$

x		-2		1		2	
$x-1$	$-$		$-$	0	$+$		$+$
x^2-4	$+$	0	$-$		$-$	0	$+$
	$-$		$+$		$-$		$+$

$(-2,1] \cup (2,\infty)$

$$y=\sqrt{x^2-5x+6}$$

$x^2-5x+6=0$

x	$-\infty$	2		3	$+\infty$
x^2-5x+6	$+$	0	$-$	0	$+$
	جواب				جواب

$$y=\sqrt{\frac{-4}{2x-4}}$$

$2x-4=0 \Rightarrow x=2$

x	$-\infty$	2	$+\infty$
	$-$	0	$+$
	جواب		

۴/۸

توابع رادیکالی با فرجه فرد

برای تعیین دامنه این توابع نیازی به تعیین علامت نیست چون زیر رادیکال می‌تواند منفی یا مثبت اختیار کند.

$\sqrt[3]{8}=2 \qquad \sqrt[3]{-8}=-2$

اگر زیر رادیکال چند جمله‌ای با فرجه فرد ~~اعداد حقیقی~~ دامنه تابع تمام اعداد حقیقی می‌باشد.

و اگر زیر رادیکال با فرجه فرد تابع کسری قرار داشته باشد ~~دامنه تعیین~~ دامنه تابع تمام اعداد حقیقی به غیر از ریشه‌های مخرج می‌باشد

$D_f = R - \{\text{ریشه‌های مخرج}\}$

مثال: دامنه تابع $y=\sqrt{x^5+x^4+\sqrt{2}}$ را حساب کنید

$D_f=R$ یا $D_f=(-\infty , +\infty)$

مثال: دامنه تابع $y=\sqrt{\frac{x-3}{x+2}}$ را حساب کنید

$D_f=R-\{-2\}$

$y=\sqrt{\frac{-5}{x^8+1}}$

$D_f=R$

$x^8=-1 \rightarrow$ ریشه حقیقی ندارد

۵/۹

تابع لگاریتمی

در این توابع عبارت لگاریتمی باید بزرگتر از صفر باشد چون فقط اعداد مثبت لگاریتم دارند.

$y=\log(x-3) \Rightarrow x-3>0 \Rightarrow x>3 \Rightarrow D_f=(3,\infty)$

$y=\ln(x^2-1) \Rightarrow x^2-1>0 \Rightarrow x^2>1 \Rightarrow x>1$ یا $x<-1$

$D_f=(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$

برد توابع

مناسبترین روش برای پیدا کردن برد این است که x را برحسب y بدست آورده و دامنه تابع بدست آمده را پیدا کنیم

مثال: برد تابع $y=\frac{2x}{x-1}$ را بدست آورید.

$y=\frac{2x}{x-1} \Rightarrow xy-y=2x \Rightarrow xy-2x=y \Rightarrow$

$x(y-2)=y \Rightarrow x=\frac{y}{y-2}$

$y-2=0 \Rightarrow y=2 \Rightarrow R_f=R-\{2\}$

نکته: اگر تابع $y=\frac{ax+b}{cx+d}$ را داشته باشیم برای بدست آوردن برد آن از مجموعه اعداد حقیقی عدد $\frac{a}{c}$ را کم می‌کنیم

$R_f=R-\{\frac{a}{c}\}$

مثال: برد تابع $\frac{5x-2}{3x+5}$ را بدست آورید.

$R_f=R-\{5/3\}$

۶/۵

برد توابع زیر را محاسبه کنید

$y = ۲x^۲ - ۶$

$-۲x^۲ = -y - ۶ \Rightarrow ۲x^۲ = y + ۶ \Rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{y+۶}{۲}} \Rightarrow$

$y + ۶ \geq ۰ \Rightarrow y \geq -۶ \qquad R_f = [-۶, \infty)$

$y = \cos x - ۳$

می دانیم

$-۱ \leq \cos x \leq ۱$

$-۱ - ۳ \leq \cos x - ۳ \leq ۱ - ۳ \Rightarrow -۴ \leq \cos x - ۳ \leq -۲$

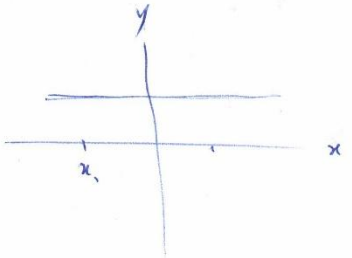
$R_f = [-۴, -۲]$

۷/۶

تابع ثابت :

تابع f را ثابت گوییم هرگاه، $f(x)=c \quad : \quad \forall x \in D_f$

$y=2$



تابع چند ضابطه ای

ممکن است که یک تابع به جای یک ضابطه، چند ضابطه داشته باشد

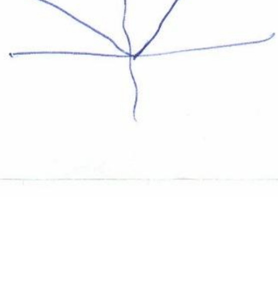
$$f(x)=\begin{cases} 3x-1 & x>3 \\ x^2-2 & -2\leq x\leq 3 \\ 2x+3 & x<-2 \end{cases}$$

$$f(4) = 3(4)-1 = 11$$
$$f(0) = (0)^2-2 = -2$$
$$f(-5) = 2(-5)+3 = -7$$

تابع قدر مطلق

تابعی است که به ازای هر عدد حقیقی مقدار غیر منفی آن را ارائه می دهد

$g(x)=|x|$



$$|x| = \begin{cases} x & x\geq 0 \\ -x & x<0 \end{cases}$$

۸/۶

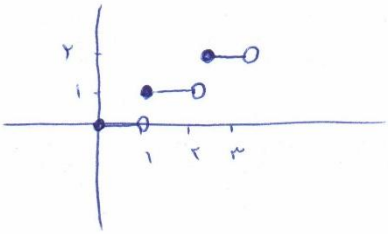
تابع جزء صحیح

تابع جزء صحیح را به صورت $[x]$ نشان می‌دهند که منظور از آن مقدار صحیح x می‌باشد

یعنی به ازای هر $x \in R$ داریم $n-1 \leq x < n$ که در آن $n \in Z$ بوده و داریم

$[x] = n-1$

$[۱/۸] = ۱$ $\quad$ $[۰/۵] = ۰$ $\quad$ $[-۳] = -۳$ $\quad$ $[-۰/۷] = -۱$



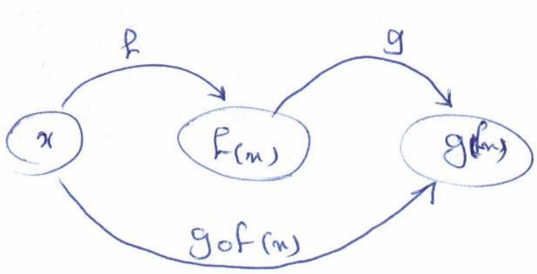
اگر k عددی ثابت باشد

$$[x+k] = [x]+k$$

$$[x-۳] = [x]-۳$$

تابع مرکب:

دو تابع f و g را در نظر می‌گیریم، در شکل زیر تابع f، x را به $f(x)$ منتقل می‌کند و تابع g، $f(x)$ را به $g[f(x)]$ می‌برد.



9/b

مثال: اگر $f(x)=x+5$ و $g(x)=x^2-1$ باشد مطلوبست محاسبه fog و gof

$fog = x^2-1+5 = x^2+4$

$gof = (x+5)^2-1 = x^2+10x+25-1 = x^2+10x+24$

مثال اگر $f(x)=\frac{x+1}{x-1}$ و $g(x)=\frac{2x+1}{x+1}$ ، fog و gof را حساب کنید

$$fog(x) = f(g(x)) = f\left(\frac{2x+1}{x+1}\right) = \frac{\frac{2x+1}{x+1}+1}{\frac{2x+1}{x+1}-1} = \frac{3x+2}{x}$$

$$gof(x) = g(f(x)) = \frac{2\left(\frac{x+1}{x-1}\right)+1}{\frac{x+1}{x-1}-1} = \frac{3x+1}{2x}$$

مثال: اگر $f(x)=x+5$ و $fog(x)=x-1$ ، $g(x)$ را پیدا کنید

$fog(x)=x-1 \Rightarrow g(x)+5=x-1 \Rightarrow g(x)=x-6$

مثال: اگر $f(x)=x+3$ ، $g(x)=\log(x)$ ، $h(x)=5x$ آنگاه $hogof(x)$ را حساب کنید

$hogof(x)=h(g(f(x))) \Rightarrow 5(\log(x+3)) = 5\log(x+3)$

عملیات جبری روی توابع

اگر دو تابع $f(x)$ و $g(x)$ را داشته باشیم

$$(f+g)(x) = f(x)+g(x)$$

$$(f-g)(x) = f(x)-g(x)$$

$$(f.g)(x) = f(x).g(x)$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

مثال: اگر $f(x)=x^2+5$ و $g(x)=x^2$ مطلوب است محاسبه هر یک از عبارات زیر

الف) $(f+g)(x)$ ب) $(f-g)(x)$ ج) $(f.g)(x)$ د) $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$

معکوس یک تابع

اگر تابع $f=\{(x,y) : (x,y)\in f\}$ معکوس یا وارون آن به صورت زیر تعریف می‌گردد

$$f^{-1}=\{(y,x) : (x,y)\in f\}$$

برای بدست آوردن معکوس یک تابع ابتدا در ضابطه تابع x را برحسب y بدست می‌آوریم سپس در ضابطه بدست آمده جای x و y را باهم عوض می‌کنیم.

مثال: معکوس تابع زیر را بدست آورید.

$$y=3x+5$$

معکوس

$$-3x=-y+5 \Rightarrow x=\frac{-y+5}{-3} \Longrightarrow y=\frac{-x+5}{-3}$$

11/b $y = \frac{2x}{2x-1}$

معکوس

$$2xy - y = 2x \Rightarrow 2xy - 2x = y \Rightarrow x(2y-2) = y \Rightarrow$$

$$x = \frac{y}{2y-2} \Rightarrow y = \frac{x}{2x-2}$$

$$y = -2 + \sqrt{x+1} \Rightarrow y+2 = \sqrt{x+1} \Rightarrow (y+2)^2 = x+1$$

$$x = (y+2)^2 - 1 \Rightarrow y = (x+2)^2 - 1$$

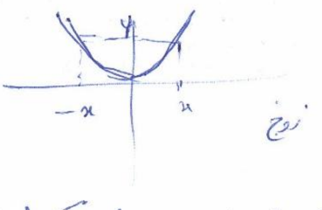
تابع معکوس $y = \ln x$ عبارت است از $y = e^x$

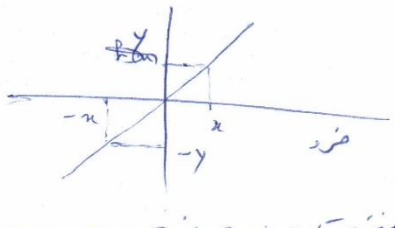
$$y = \ln x \Rightarrow y = \log_e x \Rightarrow x = e^y \xrightarrow{\text{جای } x \text{ و } y \text{ را عوض}} y = e^x$$

تابع زوج و تابع فرد

تابع f را زوج گوییم هرگاه $\forall x \in D_f \quad f(x) = f(-x)$

تابع f را فرد گوییم هرگاه $\forall x \in D_f \quad f(-x) = -f(x)$





مثلاً تابع زوج نسبت به محور y ها متقارن است و تابع فرد نسبت به مبدأ متقارن است

۱۳/b

مثال: کدامیک از توابع زیر زوج و کدامیک فرد میباشد

$$f(x) = x^5 + x^3 \Rightarrow f(-x) = (-x^5) + (-x)^3 = -x^5 - x^3$$

$$f(x) = -(x^5 + x^3) \Rightarrow f(-x) = -f(x)$$ فرد

$$f(x) = -4x^4 + \frac{x^2}{2}$$

$$f(-x) = -4(-x)^4 + \frac{(-x)^2}{2} \Rightarrow f(-x) = -4x^4 + \frac{x^2}{2} \Rightarrow$$

$$f(-x) = f(x) \Rightarrow$$ زوج

$$\sin(-x) = -\sin(x) \qquad \cos(-x) = \cos(x)$$

$$tg \quad \tan(-x) = -\tan(x) \qquad \cot(-x) = -\cot(x)$$

$$|-x| = |x|$$

زوج یا فرد بودن تابع زیر را مشخص کنید

$$y = x^3 - 3x + 4$$

$$f(-x) = (-x)^3 - 3(-x) + 4 = -x^3 + 3x + 4$$ نه زوج و نه فرد

$$f(-x) \neq -f(x), \quad f(-x) \neq f(x)$$

$$f(x) = \frac{|x| - 5\sin x}{x^2 - 4\cos x}$$

$$f(-x) = \frac{|-x| - 5\sin(-x)}{(-x)^2 - 4\cos(-x)} \Rightarrow f(-x) = \frac{|x| + 5\sin(x)}{x^2 - 4\cos(x)}$$

نه زوج و نه فرد

۱۳/b $y = |x| - 5\cos x$

$f(-x) = |-x| - 5\cos(-x) \Rightarrow f(-x) = |x| - 5\cos(x)$

$f(-x) = f(x) \Rightarrow$ زوج

$y = \dfrac{x^3 + x}{x^2 + \cos(x)}$

$f(-x) = \dfrac{(-x)^3 + (-x)}{(-x)^2 + \cos(-x)} = \dfrac{-x^3 - x}{x^2 + \cos x} = -\dfrac{(x^3 + x)}{x^2 + \cos x}$

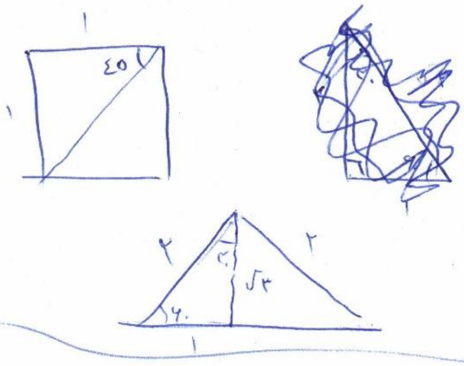
$f(-x) = -f(x) \Rightarrow$ فرد

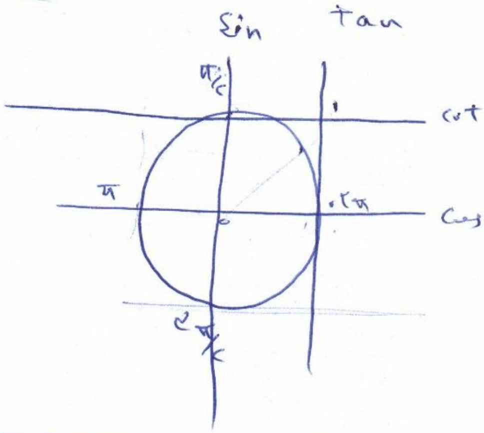
۱۴/۲

$$\lim_{t\to 3} \frac{t^2+t-5}{4} = \frac{7}{4}$$

$$\lim_{x\to \pi/4} \frac{4\pi \cos x}{1+\cot x} = \frac{4\pi \cos \pi/4}{1+\cot \pi/4} = \frac{4\pi \sqrt{2}/2}{1+1} = \frac{2\sqrt{2}\pi}{2}$$

$$= \sqrt{2}\pi$$





$$\lim_{x\to e} (\ln x^3+1) = \lim (\ln e^3+1) =$$

$$3\ln e+1 = 3+1 = 4$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{x-y}{x+y} = \frac{-y}{y} = -1$$

۱۵/۲

صور مبهم

عبارتهای $\frac{0}{0}$ ، $\frac{\infty}{\infty}$ ، $\infty-\infty$ یعنی با این‌ها جواب را مشخص نمی‌کنند یا جوابی مشخص به صورت مستقیم نمی‌دهند

حالت اول $\frac{0}{0}$

الف) اگر تابع کسری باشد صورت و مخرج ~~...~~ را تجزیه می‌کنیم تا جایی که رفع ابهام شود.

اگر با روش‌های معمولی نتوانیم صورت و مخرج را ~~...~~ تجزیه کنیم صورت و مخرج را بر $x-a$ تقسیم می‌کنیم سپس حد را محاسبه می‌کنیم

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to 1}\frac{\cancel{(x-1)}(x+1)}{\cancel{x-1}} \Rightarrow \lim_{x\to 1} x+1 = 2$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{4x^3-3x^2+5x-6}{3x^3+2x^2-5} \overset{\frac{0}{0}}{=} \frac{\frac{4x^3-3x^2+5x-6}{x-1}}{\frac{3x^3+2x^2-5}{x-1}} = \frac{11}{13}$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^5-1}{x-1} \rightarrow \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{تقسیم}} \lim_{x\to 1} x^4+x^3+x^2+x+1 = 5$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^5-x^2}{x^3-x^2} = \frac{0}{0} \Rightarrow \overset{\text{فاکتور}}{\lim_{x\to 0}}\frac{x^2(x^3-1)}{x^2(x-1)} = 1$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2}{3-3^{\frac{2}{x}}} = \frac{2}{3-3^{\frac{2}{\infty}}} = \frac{2}{3-1} = 1$$

ب) اگر صورت و یا مخرج (یا هر دو) یک تابع به صورت رادیکالی باشد، برای رفع ابهام $\frac{0}{0}$ صورت و مخرج را در مزدوج صورت یا مخرج ضرب می‌کنیم و اگر عبارت رادیکالی به صورت یک جمله باشد در اینصورت صورت یا مخرج را در این عبارت ضرب می‌نماییم.

$$\cancel{\lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{x} - x}{5x - 5} = \frac{0}{0}}$$

$$\cancel{\lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{x} - x}{5x - 5} \times \frac{\sqrt{x} + x}{\sqrt{x} + x} = \lim_{x \to 1} \frac{x + x\sqrt{x} - x\sqrt{x} - x^2}{5x\sqrt{x} + 5x^2 - 5\sqrt{x} - 5x} = \frac{0}{0}}$$

$$\cancel{x(1-x)}$$

$$\lim_{x \to -2} \frac{x + \sqrt{x+6}}{x+2} = \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x \to -2} \frac{x + \sqrt{x+6}}{x+2} \times \frac{x - \sqrt{x+6}}{x - \sqrt{x+6}} = \frac{x^2 - x - 6}{(x+2)(x - \sqrt{x+6})} =$$

ضرب

$$\lim_{x \to -2} \frac{\cancel{(x+2)}(x-3)}{\cancel{(x+2)}(x - \sqrt{x+6})} = \frac{-5}{-4} = \frac{5}{4}$$

۱۷/c

$$\lim_{x\to -3} \frac{x+3}{\sqrt{x+3}} = \frac{0}{0} \rightsquigarrow \frac{x+3}{\sqrt{x+3}} \times \frac{\sqrt{x+3}}{\sqrt{x+3}} \Rightarrow$$

$$\lim_{x\to -3} \frac{\cancel{(x+3)}\sqrt{x+3}}{\cancel{(x+3)}} = 0$$

در توابع کسری زمانی که $x\to\infty$ حد تابع به صورت $\frac{\infty}{\infty}$ درآمد در این صورت برای رفع ابهام، فقط از بزرگترین توان x در صورت و مخرج استفاده می‌کنیم و آنگاه حد را حساب می‌کنیم $\frac{\infty}{\infty}$

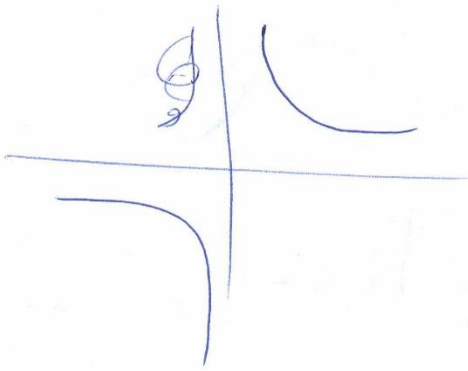
$$\lim_{x\to\infty} \frac{5x^5-3x^2+2+x}{3x^3+x^2+1+x} = \frac{\infty}{\infty} \rightsquigarrow \lim_{x\to\infty} \frac{5x^5}{3x^3} = \frac{5}{3}x^2 = \infty$$

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{x^4+x^2-1}{x^2+4x-2} = \lim_{x\to -\infty} \frac{x^4}{x^2} = \lim_{x\to -\infty} x^2 = +\infty$$

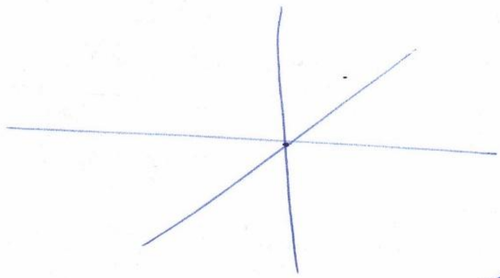
$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^3+x^2-1}{4x^2+x^5+1} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3}{x^5} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^2} = 0$$

۱۲/c

پیوستگی



$$\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^-} f(x) = f(a)$$



نقطه ① ناپیوستگی [illegible]

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x+1}{x+2} & x \neq 1 \\ 2 & x = 1 \end{cases}$$

$$\lim_{x\to 1^\pm} f(x) = \frac{2}{3}$$

$$f(1) = 2$$

$$f(x) \begin{cases} [x+1] & x < 0 \\ 1 & x = 0 \\ |x+1| & x > 0 \end{cases}$$

نقطه $x=0$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-1}{x+1} & x \neq -1 \\ -2 & x = -1 \end{cases}$$

نقطه $x=-1$

19/c

تابع زیر مفروض است، اگر تابع در نقطه $x=2$ پیوسته باشد مقدار $a+b$ چقدر است؟

$$f(x)=\begin{cases} x^2+2x-8 & x<2 \\ a & x=2 \\ x+3b & x>2 \end{cases}$$

به ازای چه مقدار a، تابع $f(x)=\begin{cases} a[x]+|x-1| & x\neq 2 \\ 5 & x=2 \end{cases}$ در نقطه $x=2$ پیوستگی دارد؟

۲۰/D

مشتق

تابع $f(x)$ را در نظر بگیرید، به x به اندازه h نمو می‌دهیم که x به $x+h$ تبدیل می‌شود
اختلاف این دو می‌شود نمو متغیر

$$\Delta x = x_2 - x_1 = x+h-x = h$$

$$\Delta x = h$$

پس به همین ترتیب $y=f(x)$ به $y=f(x+h)$ تبدیل می‌شود. اختلاف این دو مقدار را نمو تابع گویند

$$\Delta y = y_2 - y_1 = f(x+h) - f(x)$$

پس متوسط تغییرات تابع برابر است با $\frac{\Delta y}{\Delta x}$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

حال اگر h یا Δx به سمت صفر میل کند و اگر کسر فوق دارای حد باشد، این حد را مشتق تابع ~~[illegible]~~ می‌گویند

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

مشتق تابع را به صورت روبرو نشان می‌دهند $y' = f'(x)$

به کمک مشتق می‌خواهیم بدانیم اگر x تغییر کند y به چه مقدار تغییر می‌کند.

مثال: به کمک مشتق با استفاده از تعریف مشتق
مشتق تابع $y = x^2$ را تعیین کنید.

$$y' = f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{x^2+2xh+h^2-x^2}{h}$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{h^2+2xh}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h(h+2x)}{h} = 2x$$

تمام فرمول‌های مشتق از طریق رابطه $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$ بدست می‌آید. حال فرمول‌های مشتق بدون اثبات ارائه می‌شود.

فرمول‌های مشتق‌گیری

۱) $y = c$ (ثابت) $\Rightarrow y' = 0$

۲) $y = kx$ (ثابت) $\Rightarrow y' = k$ $\qquad y = \sqrt{2}\,x \Rightarrow y' = \sqrt{2}$

$y = x^n \Rightarrow y' = nx^{n-1}$

۳) $y = kx^n \Rightarrow y' = knx^{n-1}$ $\qquad y = 2x^4 \Rightarrow y' = 8x^3$

۴) $y = ku^n \Rightarrow y' = knu'u^{n-1}$ $\qquad y = 3(x^5+1)^4 \Rightarrow y' = 3 \times 4 \times 5x^4 (x^5+1)^3$

۵) $y = u \pm v \Rightarrow y' = u' \pm v'$ $\qquad y = x^5 - 8 \Rightarrow y' = 5x^4$

۶) $y = u \cdot v \Rightarrow y' = u'v + v'u$ $\qquad y = (x^2+3)(4x+6) \Rightarrow y' = 2x(4x+6) + 4(x^2+3)$

۷) $y = \dfrac{u}{v} \Rightarrow y' = \dfrac{u'v - v'u}{v^2}$ $\qquad y = \dfrac{2x}{x^2-1} \Rightarrow y' = \dfrac{2(x^2-1) - 2x(2)}{(x^2-1)^2}$

۸) $y = \sqrt[n]{u^m} \Rightarrow y' = \dfrac{mu'}{n\sqrt[n]{u^{n-m}}}$ $\qquad y = \sqrt[7]{x^5} = \dfrac{5}{7\sqrt[7]{x^2}}$

۲۴/۵

مشتق توابع مثلثاتی

$y = \sin x \Rightarrow y' = \cos x$

$y = \cos x \Rightarrow y' = -\sin x$

$y = \tan x \Rightarrow y' = (1 + \tan^2 x)$

$y = \cot x \Rightarrow y' = -(1 + \cot^2 x)$

حال اگر u تابعی از x باشد

$y = \sin u \Rightarrow y' = u' \cos u$

مثال) $y = \sin 3x^2 \Rightarrow y' = 6x \cos 3x^2$

$y = \cos u \Rightarrow y' = -u' \sin u$

مثال) $y = \cos(x^3) \Rightarrow y' = -3x^2 \sin x^3$

$y = \tan u \Rightarrow y' = u'(1 + \tan^2 u)$

مثال) $\tan(x^2 - 8) \Rightarrow y' = 2x(1 + \tan^2(x^2 - 8))$

$y = \cot u \Rightarrow y' = -u'(1 + \cot^2 u)$

مثال) $y = \cot(\sqrt{x}) \Rightarrow y' = -\frac{1}{2\sqrt{x}}(1 + \cot^2 \sqrt{x})$

$y = \sin^n u \Rightarrow y' = (n u' \cos u) \sin^{n-1} u$

مثال) $y = \sin^5 x^2 \Rightarrow y' = (5 \times 2x \times \cos x^2) \sin^4 x^2$

۲۳/D

$y = \cos^n u \Rightarrow y' = (-n u' \sin u)(\cos^{n-1} u)$

مثال) $y = \cos^2(\sqrt{x}) \Rightarrow y' = \left(-2 \frac{1}{2\sqrt{x}} \sin\sqrt{x}\right)(\cos\sqrt{x})$

$y = \tan^n u \Rightarrow y' = n u' (1 + \tan^2 u) \tan^{n-1} u$

مثال) $y = \tan^3 x^7 \Rightarrow y' = 3 \times 7x^6 (1 + \tan^2 x^7) \tan^2 x^7$

$y = \cot^n u \Rightarrow y' = -n u' (1 + \cot^2 u) \cot^{n-1} u$

مثال) $y = 4\cot^2\sqrt{x} \Rightarrow y' = -2 \times 4 \frac{1}{2\sqrt{x}} (1 + \cot^2\sqrt{x}) \cot\sqrt{x}$

مشتق توابع معکوس مثلثاتی

$y = \sin^{-1} u = \operatorname{Arc}\sin u \Rightarrow y' = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$

مثال) $y = \sin^{-1} x^2 \Rightarrow y' = \frac{2x}{\sqrt{1-(x^2)^2}}$

$y = \cos^{-1} u = \operatorname{Arc}\cos u \Rightarrow y' = \frac{-u'}{\sqrt{1-u^2}}$

مثال) $y = \cos^{-1}(x^2+3) \Rightarrow y' = \frac{-2x}{\sqrt{1-(x^2+3)^2}}$

$y = \tan^{-1} u = \operatorname{Arc}\tan u \Rightarrow y' = \frac{u'}{1+u^2}$

مثال) $y = \tan^{-1} x^8 \Rightarrow y' = \frac{8x^7}{1+(x^8)^2}$

$y = \cot^{-1} u = \operatorname{Arc}\cot u = \frac{-u'}{1+u^2}$

مثال) $y = \cot^{-1}(x^3+9) \Rightarrow y' = \frac{3x^2}{1+(x^3+9)^2}$

مشتق توابع لگاریتمی

$y = \ln u \Rightarrow y' = \frac{u'}{u}$

مثال) $y = \ln 2x \Rightarrow y' = \frac{2}{2x} = \frac{1}{x}$

$y = \log_a u \Rightarrow y' = \frac{u'}{u \ln a}$

مثال) $y = \log_4 \sqrt{x} \Rightarrow y' = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{\sqrt{x}\ln 4}$

مشتق توابع نمایی

$y = e^u \Rightarrow y' = u' e^u$

مثال) $y = e^{x^2 + \sin x} \Rightarrow y' = (2x + \cos x)\, e^{x^2 + \sin x}$

$y = a^u \Rightarrow y' = u' a^u \ln a$

مثال) $y = 4^{\sin x} \Rightarrow y' = \cos x \times 4^{\sin x} \times \ln 4$

مثال) $y = \ln(x^3 + 2x^2) \Rightarrow y' = \frac{3x^2 + 4x}{x^3 + 2x^2}$

مثال) $y = 4\cos^2 x \Rightarrow y' = (-2 \times 4 \times 1 \sin x)(\cos^{2-1} x)$

مثال) $y = \sqrt[3]{\sin x} \Rightarrow y' = \frac{1 \times \cos x}{3\sqrt[3]{\sin^{3-1} x}}$

۲۵

مشتق توابع چند ضابطه ای

اگر تابعی به جای یک ضابطه چند ضابطه داشته باشد در صورتی می توانیم مشتق بگیریم که مشتق چپ و مشتق راست آن با هم برابر باشند

مشتق تابع در نقطه ۰

$$y = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$$

مشتق چپ $\quad y = -x \Rightarrow y' = -1$

مشتق راست $\quad y = x \Rightarrow y' = 1$

بنابراین تابع در نقطه ۰ مشتق ندارد

مقدار a و b را طوری بیابید که تابع زیر در نقطه ۱ مشتق پذیر باشد

$$y = \begin{cases} ax + 2 & x \geq 1 \\ x^2 + b & x < 1 \end{cases}$$

مشتق چپ $\quad y = x^2 + b \Rightarrow y' = 2x$

مشتق راست $\quad y = ax + 2 \Rightarrow y' = a$

$$a = 2x \xRightarrow{\text{نقطه } 1} a = 2$$

$$\lim_{x \to 1^-} (x^2 + b) = 1 + b \qquad 1 + b = 4 \Rightarrow b = 3$$

$$\lim_{x \to 1^+} (ax + 2) = a + 2$$

مشتق تابع مرکب

اگر y تابعی از u و u تابعی از x باشد $y=f(u)$ $\quad$ $U=h(x)$

در اینصورت مشتق تابع y نسبت به x از رابطه $y'_x = f'(u) \cdot h'(x)$ بدست می‌آید

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

مثال)

$$y = u^۳ + ۵u \qquad u = x^۳ + ۴ \Rightarrow y'_x = ?$$

$$y'_x = (۳u^۲ + ۵)(۳x^۲) \Rightarrow y'_x = \left(۳(x^۳+۴)^۲ + ۵\right)(۳x^۲)$$

مثال) مشتق تابع y نسبت به x در نقطه ۱

$$y = (۲u + ۴)^۳ \,, \quad u = x^۳ + ۲$$

$$y'_x = ۳ \times ۲ (۲u+۴)^۲ (۳x^۲) = ۶\left(۲(x^۳+۲)+۴\right)^۲ (۳x^۲)$$

$$= ۲۵۹۲$$

[illegible] ۹۱ [illegible]

کاربرد مشتق

با استفاده از مشتق می توان زاویه یا شیب خط مماس یا قائم بر منحنی یک تابع را پیدا نمود، با قرار دادن ضریب زاویه خط مماس یا قائم بر منحنی در فرمول تشکیل معادله، معادله خط مماس یا قائم بر منحنی تابع بدست می آید.

ضریب زاویه یا شیب خط مماس بر منحنی یک تابع برابر است با مشتق تابع مفروض

$$y = f(x) \Rightarrow m = f'(x) \quad \text{یا} \quad m = y'$$

که m ضریب زاویه خط مماس بر منحنی تابع $y=f(x)$ می باشد

همچنین ضریب زاویه یا شیب خط عمود بر منحنی یک تابع برابر است با قرینه عکس مشتق تابع مفروض

$$y = f(x) \Rightarrow m' = -\frac{1}{f'(x)} \quad \text{یا} \quad m' = -\frac{1}{y'}$$

فرمول تشکیل دهنده معادله یک خط در نقطه $A(x,y)$ عبارت است از:

معادله خط مماس $\quad y - y_A = m(x - x_A)$

معادله خط عمود $\quad y - y_A = -\frac{1}{m}(x - x_A)$

مثال) معادله خط مماس و عمود بر منحنی تابع $y = 2x^2 - 3x$ را در نقطه $A(1,2)$ بدست آورید

$$y' = 4x - 3 \xrightarrow{x=1} m = 1$$

مماس $\quad y - y_A = m(x - x_A) \Rightarrow y - 2 = (x-1) \Rightarrow y = x+2$

عمود $\quad y - y_A = -\frac{1}{m}(x - x_A) \Rightarrow y - 2 = -(x-1) \Rightarrow y = -x+3$

۲۷ e

مثال) معادله خط قائم و مماس بر منحنی نمودار تابع $y = \frac{2x+1}{x}$ را در نقطه $x = -1$ بدست آورید.

مماس $\quad m = \dfrac{2x - (2x+1)}{x^2} \Rightarrow \dfrac{-1}{1} = -1$

$$y - 1 = -1(x+1) \Rightarrow y = -x$$

قائم $\quad y - 1 = 1(x+1) \Rightarrow y = x + 2$

تابع f را در فاصله $[a,b]$ فرض می‌کنیم
تابع f در فاصله $[a,b]$ صعودی خوانده می‌شود اگر که

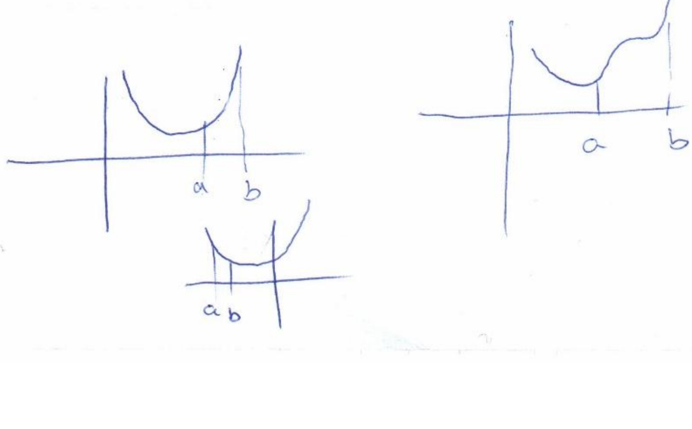
$$\forall x_1, x_2 \in [a,b] \,,\; x_2 \geq x_1 \Leftrightarrow f(x_2) \geq f(x_1)$$

و اگر نامساوی‌های فوق علامت تساوی نداشته باشند تابع را در فاصله $[a,b]$ اکیداً صعودی می‌نامند

و همچنین ~~[illegible]~~ تابع f در این فاصله نزولی خوانده می‌شود اگر

$$\forall x_1, x_2 \in [a,b] \,,\; x_2 \geq x_1 \Leftrightarrow f(x_2) \leq f(x_1)$$

و همچنین اگر نامساوی فوق علامت تساوی نداشته باشد تابع f را در فاصله $[a,b]$ اکیداً نزولی می‌نامند



۲۹/۴

اگر $y' > 0 \Rightarrow$ منحنی تابع صعودی

$y' < 0 \Rightarrow$ منحنی تابع نزولی

$y' = 0 \Rightarrow$ منحنی تابع نقطه ثابت است

مثال) تابع $x^3 - 3x + 1$ مفروض است. فاصله‌هایی که این تابع در آن اکیداً صعودی و یا اکیداً نزولی است را مشخص کنید.

$$y' = 3x^2 - 3$$

$$3x^2 - 3 = 0 \Rightarrow x = \pm 1$$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

$(-\infty, -1)$ صعودی

$(-1, 1)$ نزولی

$(1, +\infty)$ صعودی

نقاط $x=1$ و $x=-1$ نقاط بحرانی که در مورد آن صحبت کردیم

مثال) تابع $y = -x^2 + 2x$ مفروض است. این تابع در چه فاصله‌ای صعودی و در چه فاصله نزولی است

$$y' = -2x + 2$$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	
		$\nearrow$		$\searrow$	

۳۰/۴

نقاط اکسترمم و نقطه عطف تابع

~~برای تعیین نوع نقطه بحرانی می‌توان از علامت مشتق دوم یعنی $y''=f''(x)$ استفاده کرد~~

~~اگر $f''(a)$~~

به طور کلی برای تعیین ماکزیمم و مینیمم و نقاط عطف یک منحنی به ترتیب زیر عمل می‌کنیم

ابتدا از تابع مشتق گرفته و مشتق را مساوی صفر قرار می‌دهیم، و ریشه‌های آن را پیدا می‌کنیم

$$y=f(x) \Rightarrow y'=f'(x)=0 \Rightarrow x=a$$

ریشه مشتق را در ضابطه تابع قرار می‌دهیم و عرض آن را به دست می‌آوریم (طول نقطه)

$$m(a, f(a))$$

برای تعیین نوع نقطه بحرانی می‌توان از علامت مشتق دوم یعنی $y''=f''(x)$ استفاده کرد

اگر $f''(a)<0 \Rightarrow$ نقطه بحرانی m ماکزیمم است

اگر $f''(a)>0$ " " m مینیمم است

اگر در همسایگی نقطه $x=a$ علامت $f''(x)$ در دو طرف a متفاوت باشد، نقطه M نقطه عطف است

$y''>0 \Rightarrow min$

$y''<0 \Rightarrow max$

$y''=0 \Rightarrow$ عطف $\rightarrow$ تغییر علامت در همسایگی

۳۱/۲

مثال) نقاط بحرانی توابع زیر را تعیین کنید و نوع آن را مشخص کنید

(۱) $y = -x^2 + 4x$

$y' = -2x + 4 \Rightarrow x = 2$ $\qquad (2, 4)$

$y'' = -2 \Rightarrow y'' < 0 \Rightarrow$ نقطه $(2,4)$ max است

---

(۲) $y = x^4 - 4x^3 + 10$

$y' = 4x^3 - 12x^2 \Rightarrow x^2(4x - 12) \Rightarrow$

$x = 0 \quad x = 3 \qquad m_1 \Big|_{10}^{0} \quad m_2 \Big|_{-17}^{3}$

$y'' = 12x^2 - 24x \xRightarrow{x=0} y'' = 0$

$x < 0 \Rightarrow f''(0) > 0$ و اگر $x > 0 \Rightarrow f''(0) < 0$

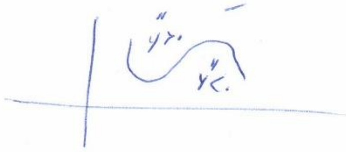
چون در نقطه m_1 مشتق دوم تغییر علامت می‌دهد این نقطه عطف است

$y'' = 12x^2 - 24x \xRightarrow{x=3} 12(3)^2 - 24(3) = 36 \Rightarrow y'' > 0$

پس $m \Big|_{-17}^{3}$ نقطه min است

تحدب و تقعر

برای تعیین ناحیه تقعر و تحدب یک تابع از مشتق دوم تابع استفاده می‌کنیم. اگر مشتق دوم مثبت باشد می‌گوییم تابع مقعر است و اگر مشتق دوم منفی باشد می‌گوییم تابع در نقطه مورد نظر محدب است و اگر مشتق دوم تابع برابر صفر باشد آن نقطه را نقطه عطف گویند



۳۲/۵ مثال) فاصله هایی را که در آن تابع x^3+x^2+1 مقعر یا محدب می‌باشد را مشخص کنید

$$y' = 3x^2 + 2x$$

$$y'' = 6x + 2 \Rightarrow x = -\frac{1}{3}$$

x		$-\frac{1}{3}$	
y''	$-$	0	$+$
	$\cap$		$\cup$

مثال) تابع $y = \frac{1+x}{-1+x}$ در فاصله $[2,3]$ از نظر تحدب و تقعر چگونه است

$$y' = \frac{(-1+x)-(1+x)}{(-1+x)^2} = \frac{-2}{(-1+x)^2}$$

$$y'' = -\frac{(2\times(-1+x))\times -2}{[(-1+x)^2]^2} = \frac{4x-4}{(-1+x)^4}$$

$$4x-4=0 \Rightarrow x=1$$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
y''	$-$	0	$+$
	$\cap$		$\cup$

پس در فاصله $[2,3]$ مقعر است

قانون هوپیتال (برای رفع ابهام)

در توابع کسری، اگر به حالت مبهم $\frac{0}{0}$ و $\frac{\infty}{\infty}$ برخورد کردیم می‌توانیم طبق این قانون از صورت و مخرج کسر ~~[illegible]~~ بصورت جداگانه مشتق گرفته و حد تابع بدست آمده را محاسبه نماییم که برابر با حد تابع اصلی است

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{e^x} = \frac{\infty}{\infty} \Rightarrow \lim_{x\to\infty}\frac{2x}{e^x} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x\to\infty}\frac{2}{e^x} = \frac{2}{\infty} = 0$$

$$\frac{33}{8} \quad \lim_{x \to 0} \frac{1-\cos x}{x} \Rightarrow = \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{-(-\sin x)}{1} = \lim_{x \to 0} \sin x = \sin(0) = 0$$

۳۴/۵

انتگرال گیری و روشهای انتگرال گیری

انتگرال گیری روش معکوس مشتق گیری است و در واقع انتگرال روشی است برای تعیین مساحت زیر یک منحنی.

انتگرال ~~[illegible]~~ ، عکس عمل مشتق گیری است ، به همین دلیل اگر از تابعی ابتدا مشتق بگیریم و از حاصل آن مجدداً انتگرال بگیریم به همان تابع اولیه خواهیم رسید.

انتگرال نامعین:

تابع $F(x)$ را در نظر بگیرید، اگر مشتق تابع $F(x)$ برابر با $f(x)$ باشد طبق تعریف به $F(x)$ انتگرال نامعین یا آنتی مشتق یا تابع اولیه $f(x)$ گویند و آن را به صورت

$$\int f(x)\,dx = F(x) + c$$

$$\frac{d}{dx}\left[F(x)+c\right] = \frac{dF(x)}{dx} + \frac{dc}{dx} = f(x) + 0 = f(x)$$

خواص انتگرال نامعین

$$\frac{d}{dx}\left[\int f(x)\,dx\right] = f(x)$$

مثال) $\frac{d}{dx}\int \frac{1}{x}\,dx = \frac{1}{x}$

$$\int \left(f(x) \pm g(x)\right)dx = \int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx$$

مثال) $\int (5x^4 + 4x^3)\,dx = \int 5x^4\,dx + \int 4x^3\,dx$

۲۵/۹

توجه داشته باشیم:

$$\int (f(x)g(x))\,dx \neq \int f(x)\,dx \cdot \int g(x)\,dx$$

$$\int \frac{f(x)}{g(x)}\,dx \neq \frac{\int f(x)\,dx}{\int g(x)\,dx}$$

$$\int a f(x)\,dx = a\int f(x)\,dx$$

مثال) $\int 5x^4\,dx = 5\int x^4\,dx$

انتگرال دوگانه: همانند مشتق که در آن مشتق مراتب بالاتر وجود دارد در انتگرال هم انتگرال مراتب بالاتر وجود دارد

$$\iint f(x)\,dx = \int (F(x)+c)\,dx \Leftarrow \int f(x)\,dx = F(x)+c \text{ اگر}$$

انتگرال دوگانه مثال) $\iint x\,dx = \int \left(\frac{x^2}{2}+c\right)dx$

فرمول‌های انتگرال جبری

انتگرال توابع جبری

① $\boxed{\int a\,dx = ax+c}$

مثال) $\int \sqrt{3}\,dx = \sqrt{3}\,x+c$

مثال) $\int 0\,dx = c$

---

۲ $\boxed{\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}+c \quad \boxed{n\neq -1}}$

مثال) $\int x^3\,dx = \frac{x^4}{4}+c$ $\qquad \int \frac{1}{x^5}\,dx = \int x^{-5}\,dx = -\frac{x^{-4}}{4}+c$

۳۶/h مثال) $\int \sqrt[4]{x^{3}}\,dx = \int x^{3/4}\,dx = \frac{4x^{7/4}}{7} + c = \frac{4}{7}\sqrt[7]{x^{4}}$

$$\boxed{\int \frac{1}{x}\,dx = \int x^{-1}\,dx = \ln|x| + c}$$

$$\boxed{\int (ax+b)^{n}\,dx = \frac{(ax+b)^{n+1}}{a(n+1)} + c}$$

مثال) $\int (3x+4)^{3}\,dx = \frac{(3x+4)^{4}}{12} + c$

مثال) $\int \left(\frac{x}{5}+2\right)^{4} = \frac{\left(\frac{x}{5}+2\right)^{5}}{\frac{5}{5}} + c = \left(\frac{x}{5}+2\right)^{5} + c$

مثال $\int (\sqrt{3}\,x+2)^{2} = \frac{(\sqrt{3}\,x+2)^{3}}{3\sqrt{3}} + c$

$$\boxed{\int (ax+b)^{-1}\,dx = \frac{1}{a}\ln|ax+b| + c}$$

$\int \frac{dx}{-3x+7} = -\frac{1}{3}\ln|-3x+7| + c$

$\int \frac{dx}{2x+2} = \int (2x+2)^{-1}\,dx = \frac{1}{2}\ln|2x+2| + c$

انتگرال توابع مثلثاتی

$$\boxed{\int \sin kx \, dx = -\frac{\cos kx}{k} + c}$$

مثال
$$\int \sin x \, dx = -\cos x + c$$

مثال
$$\int \sin \sqrt{3}\, x \, dx = -\frac{\cos \sqrt{3}\, x}{\sqrt{3}}$$

$$\int 8 \sin 5x \, dx = 8 \int \sin 5x \, dx = 8 \times -\frac{\cos 5x}{5} + c$$

$$\boxed{\int \cos kx \, dx = \frac{\sin kx}{k} + c}$$

$$\int \cos 3x \, dx = \frac{\sin 3x}{3} + c$$

$$\int \sqrt{2} \cos 5x = \sqrt{2} \int \cos 5x = \sqrt{2} \times \frac{\sin 5x}{5} + c$$

$$\boxed{\int (1 + \tan^2 kx) \, dx = \frac{\tan kx}{k}}$$

مثال
$$\int (1 + \tan^2 x) \, dx = \tan x$$

$$\int (1 + \tan^2 8x) \, dx = \frac{\tan 8x}{8}$$

۳۷/h

$$\boxed{\int (1+\cot^2 kx)\,dx = -\frac{\cot kx}{k} + c}$$

$$\int (1+\cot^2 3x)\,dx = \frac{\cot 3x}{3}$$

$$\int \sqrt{3}\left(1+\cot^2 \sqrt{3}x\right)dx = \sqrt{3}\int \left(1+\cot^2\sqrt{3}\,x\right)dx = \frac{\cancel{\sqrt{3}} \times \cot \sqrt{3}\,x}{\cancel{\sqrt{3}}} = \cot\sqrt{3}\,x$$

$$\boxed{\int \tan u\,du = -\ln|\cos u| + c}$$

$$\boxed{\int \cot u\,du = \ln|\sin u|}$$

اگر u تابعی مشتق پذیر از x باشد

$$\int \tan ax\,dx = -\frac{1}{a}\ln|\cos ax|$$

$$\int \cot ax\,dx = \frac{1}{a}\ln|\sin ax|$$

$$\int \tan 2x\,dx = \int \frac{\sin 2x}{\cos 2x}\,dx = -\ln|\cos 2x|$$

$$\int (\tan x + \cot x)\,dx = \int \tan x\,dx + \int \cot x\,dx = -\ln|\cos x| + \ln|\sin x|$$

انتگرال توابع معکوس مثلثاتی

$$\boxed{\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \operatorname{Arc}\sin \frac{x}{a} + c \qquad \left|\frac{x}{a}\right| \leq 1}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \operatorname{Arc}\sin \frac{x}{1} + c$$

$$\int \left(\frac{1}{\sqrt{4-x^2}}\right)dx = \operatorname{Arc}\sin \frac{x}{2}$$

۳۹/۱

$$\boxed{\int \frac{-dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \operatorname{Arccos}\frac{x}{a}+c \qquad \left|\frac{x}{a}\right|\leq 1}$$

$$\int \frac{-dx}{\sqrt{1-x^2}} = \operatorname{Arccos} x$$

$$\int \frac{-dx}{\sqrt{9-x^2}} = \operatorname{Arccos}\frac{x}{3}$$

$$\int \left(x^4-\frac{1}{\sqrt{4-x^2}}\right)dx = \frac{x^5}{5}+\operatorname{Arccos}\frac{x}{2}$$

$$\boxed{\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\operatorname{Arctan}\frac{x}{a}+c}$$

$$\int \frac{dx}{9+x^2} = \frac{1}{3}\operatorname{Arctan}\frac{x}{3}$$

$$\boxed{\int \frac{-dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\operatorname{Arccot}\frac{x}{a}+c}$$

$$\int \frac{-1}{9+x^2} = \frac{1}{3}\operatorname{Arccot}\frac{x}{3}$$

$$\int \frac{-3\,dx}{2+x^2} = +3\times\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{Arccot}\frac{x}{\sqrt{2}}$$

انتگرال توابع نمایی

$$\boxed{\int a^{nx}\,dx = \frac{a^{nx}}{n\ln a} + c}$$

مثال

$$\int 3^{2x}\,dx = \frac{3^{2x}}{2\ln 3} + c$$

$$\int 8^{5x}\,dx = \frac{8^{5x}}{5\ln 8} + c$$

$$\boxed{\int e^{nx}\,dx = \frac{1}{n} e^{nx} + c}$$

مثال

$$\int e^{3x}\,dx = \frac{1}{3} e^{3x} + c$$

$$\int e^{\sqrt{3}x}\,dx = \frac{1}{\sqrt{3}} e^{\sqrt{3}x}$$

روش‌های انتگرال‌گیری

تابع u مفروض است مشتق تابع u را u' می‌نامیم در روش‌های انتگرال‌گیری اگر مشتق تابع موجود باشد مستقیماً از این روش‌ها استفاده می‌کنیم و اگر u' موجود نباشد آن را ایجاد می‌کنیم و سپس از این روش‌ها استفاده می‌کنیم.

۱ـ روش [illegible] مشتق

$$\boxed{\int u' u^{n}\,dx = \frac{u^{n+1}}{n+1} + c \qquad n \neq -1}$$

۴۱/ت

حل: $\int 2x(x^2+1)^2 \xrightarrow[u'=2x]{u=x^2+1} \dfrac{(x^2+1)^3}{3}+C$

حل $\int (3x^2+7)(x^3+7x)^3dx \xrightarrow[u'=3x^2+7]{u=x^3+7x}$

$\dfrac{(x^3+7x)^4}{4}+C$

حل $\int (x^3+x^2)(3x^4+4x^3+5)^5dx \xrightarrow[u'=12x^3+12x^2]{u=3x^4+4x^3+5}$

$\dfrac{1}{12}\int (12x^3+12x^2)(3x^4+4x^3+5)^5dx = \dfrac{1}{12}\,\dfrac{(3x^4+4x^3+5)^6}{6}+C$

حل: $\int -\sin x\cos^5 x\,dx \xrightarrow[u'=-\sin x]{u=\cos x} \dfrac{\cos^6 x}{6}+C$

حل $\int \cos 3x(\sin 3x)^3dx \xrightarrow[u'=3\cos 3x]{u=\sin 3x} \dfrac{1}{3}\int (3\cos 3x)(\sin 3x)^3dx$

$\dfrac{1}{3}\,\dfrac{(\sin 3x)^4}{4}+C$

حل $\int \dfrac{\ln x}{x}dx \xrightarrow[u'=1/x]{u=\ln x} \dfrac{\ln x^2}{2}+C$

۴۲

مثال: $\int \frac{dx}{(x+3)^5} \xrightarrow[\text{اعظ}]{} \int (x+3)^{-5}dx \xrightarrow[u'=1]{u=x+3} \frac{(x+3)^{-4}}{-4}$

روش لگاریتمی

$$\boxed{\int \frac{u'}{u}dx = \ln|u|}$$

مثال $\int \frac{2x}{x^2+1}dx \xrightarrow[u'=2x]{u=x^2+1} \ln|x^2+1|+C$

مثال $\int \frac{6x^2+x}{4x^3+x^2+1}dx \xrightarrow[u'=12x^2+2x]{u=4x^3+x^2+1} \frac{1}{2}\int \frac{12x^2+2x}{4x^3+x^2+1}dx$

$= \frac{1}{2}\ln|4x^3+x^2+1|+C$

مثال $\int \frac{e^x}{-e^x+4}dx \xrightarrow[u'=-e^x]{u=-e^x+4} -\int \frac{-e^x}{-e^x+4}dx =$

$-\ln|-e^x+4|+C$

مثال: $\int \frac{\cos x-\sin x}{\sin x+\cos x}dx \xrightarrow[u'=\cos x-\sin x]{u=\sin x+\cos x} \ln|\sin x+\cos x|+C$

$\int \frac{3+3\tan^2 x}{\tan x}dx \xrightarrow[u'=(1+\tan^2 x)]{u=\tan x} 3\int \frac{1+\tan^2 x}{\tan x} = 3\ln|\tan x|+C$

۴۳

مثال. $\displaystyle\int \frac{\cot x}{\ln|\sin x|} \xrightarrow[u' = \frac{\cos x}{\sin x} = \cot x]{u = \ln|\sin x|} \int \frac{u'}{u}\,dx = \ln\big|\ln|\sin x|\big|$

[illegible]

$$\boxed{\int u' e^{u}\,dx = e^{u} + c}$$

مثال: $\displaystyle\int -2e^{-2x}\,dx \xrightarrow[u' = -2]{u = -2x} e^{-2x} + c$

$$\int (2x+1)\,e^{x^2+x+1}\,dx \xrightarrow[u' = 2x+1]{u = x^2+x+1} e^{x^2+x+1} + c$$

$$\int \frac{1}{x} e^{\ln x}\,dx \xrightarrow[u' = 1/x]{u = \ln x} e^{\ln x} + c$$

$$\int \frac{8e^{\ln x^2}}{x}\,dx \xrightarrow[u' = \frac{2x}{x^2} = 2/x]{u = \ln x^2} 4\int \frac{2e^{\ln x^2}}{x} = 4e^{\ln x^2} + c$$

$$\int (1+\tan^2 x)\,e^{\tan x}\,dx \xrightarrow[u' = 1+\tan^2 x]{u = \tan x} e^{\tan x} + c$$

روش جزء به جزء

اگر u و v دو تابع مشتق پذیر باشند داریم

$$d(uv) = u\,dv + v\,du$$

$$\int d(uv) = \int u\,dv + \int v\,du$$

فرمول انتگرال گیری جزء به جزء

$$\boxed{\int u\,dv = uv - \int v\,du}$$

بیشتر در توابعی که بصورت حاصلضرب دو تابع غیر همنوع هستند و با روش ساده نمی توان از آنها انتگرال گرفت می توان از انتگرال جزء به جزء استفاده کرد. برای استفاده از روش جزء به جزء ابتدا ضابطه داخل علامت انتگرال را به دو قسمت u و dv تقسیم کرده و سپس v و du را محاسبه کرده و در فرمول جایگذاری کنیم

مثال)
$$\int \underbrace{x}_{u} \cdot \underbrace{\cos 3x\,dx}_{dv}$$

$$u = x \Rightarrow du = 1 \times dx = dx$$

$$dv = \cos 3x \Rightarrow v = \int \cos 3x = \frac{1}{3}\sin 3x$$

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

$$\int x \cdot \cos 3x\,dx = x \times \frac{1}{3}\sin 3x - \int \frac{1}{3}\sin 3x\,dx$$

$$\frac{x}{3}\sin 3x + \frac{1}{9}\cos 3x + C$$

مثال)
$$\int x e^{x} dx \Longrightarrow \begin{array}{l} u = x \Rightarrow du = dx \\ dv = e^{x} \Rightarrow v = e^{x} \end{array}$$

$$= xe^{x} - \int e^{x} dx = xe^{x} - e^{x}$$

$$\int x \sin x \qquad \begin{array}{l} u = x \Rightarrow du = dx \\ dv = \sin x \Rightarrow v = -\cos x \end{array}$$

$$-x\cos x + \int \cos x\,dx = -x\cos x + \sin x$$

$$\int x \ln x \, dx \qquad u = \ln x \Rightarrow du = \frac{1}{x} dx$$

$$dv = \ln x \Rightarrow v = \qquad dv = x \Rightarrow v = \frac{x^2}{2}$$

$$\frac{x^2}{2}\ln x - \int \frac{x^2}{2} \times \frac{1}{x} dx = \frac{x^2}{2} \tan x - \frac{x^2}{4} + c$$

$$\int \operatorname{Arctan} x \, dx \Rightarrow \qquad u = \operatorname{Arctan} x \Rightarrow du = \frac{1}{1+x^2}$$

$$dv = dx \Rightarrow v = x$$

$$x \operatorname{Arctan} x - \int \frac{x}{1+x^2} = x \operatorname{Arctan} x - \frac{1}{2}\int \frac{2x}{1+x^2}$$

$$x \operatorname{Arctan} x - \frac{1}{2} \ln |1+x^2| + c$$

مثال ۱ از جزء به جزء

$$\int e^x \sin x \, dx \qquad u = e^x \Rightarrow du = e^x$$

$$dv = \sin x \Rightarrow v = -\cos x$$

$$-e^x \cos x + \int \cos x \, e^x \, dx \qquad u = e^x \Rightarrow du = e^x$$

$$dv = \cos x \Rightarrow v = \sin x$$

$$-e^x \cos x + e^x \sin x - \int e^x \sin x \, dx$$

$$\int e^x \sin x \, dx = -e^x \cos x + e^x \sin x - \int e^x \sin x \, dx$$

$$2\int e^x \sin x \, dx = -e^x \cos x + e^x \sin x$$

$$\int e^x \sin x \, dx = \frac{-e^x \cos x + e^x \sin x}{2}$$

انتگرال معین

تابع $y = f(x)$ را در نظر بگیرید اگر بخواهیم انتگرال این تابع را در فاصله معین $[a, b]$ بدست آوریم به این انتگرال، انتگرال معین تابع گویند و آن را به صورت زیر تعریف می‌کنند.

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

و a , b را به ترتیب حد بالا و حد پایین انتگرال گویند

خواص انتگرال معین:

اگر خواصی که برای انتگرال نامعین بیان کردیم در انتگرال معین نیز صدق می‌کند بدین ترتیب خواص انتگرال معین را به صورت زیر بیان می‌کنیم.

۱) $\int_a^b k f(x) = k\int_a^b f(x)dx$

۲) $\int_a^b (f(x) \pm g(x))\,dx = \int_a^b f(x) \pm \int_a^b g(x)dx$

۳) $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$

۴) $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx \quad a \geqslant b$

۵) $\int_a^a f(x)dx = 0 \;,\; \cancel{a\neq b}$

۶) $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx \;,\; a \leq x \leq b \Rightarrow f(x) \leq g(x)$

۴۷

مثال) $\int_1^2 (x+x^3)dx = \cancel{\int_1^2 x\,dx + \int_1^2 x^3 dx} = \frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{4}\Big]_1^2$

$$\left(\frac{2^2}{2}+\frac{2^4}{4}\right) - \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right) = \frac{21}{4}$$

$$\int_0^{\pi/2} \sin x\,dx = -\cos x\Big]_0^{\pi/2} = -\cos\frac{\pi}{2} + \cos 0 = 1$$

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{Arctan} x\Big]_1^{\infty} = \operatorname{Arctan}(\infty) - \operatorname{Arctan}(1) = \frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4}$$

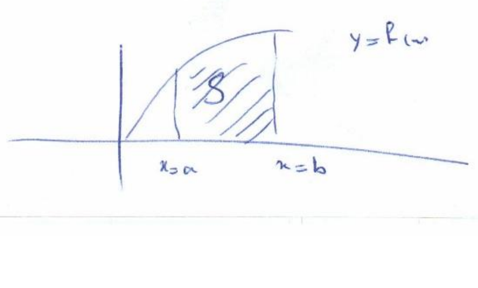
$$\int_{-2}^0 e^{2x} = \frac{1}{2}\int_{-2}^0 2e^{2x} = \frac{1}{2}e^{2x}\Big]_{-2}^0 = \frac{1}{2}e^0 - \frac{1}{2}e^{-4} = \frac{1}{2}-\frac{1}{2e^4}$$

$$\int_0^1 3^{2x}dx = \frac{3^{2x}}{2\ln 3}\Big]_0^1 = \left(\frac{3^2}{2\ln 3}-\frac{3^0}{2\ln 3}\right) = \frac{8}{2\ln 3} = \frac{4}{\ln 3}$$

محاسبه سطح با استفاده از انتگرال

فرض می‌کنیم تابع $y=f(x)$ در فاصله بسته $[a,b]$ پیوسته باشد در این صورت، مساحت سطح ناحیه محصور بین منحنی تابع $y=f(x)$، محور xها و خطوط قائم $x=a$ و $x=b$ برابر است با:

$$S = \int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = \left|F(b) - F(a)\right|$$



مثال) مساحت ناحیه محصور بین منحنی تابع $y=x^2+1$ ، محور x ها ، خطوط قائم $x=0$ و $x=2$ را محاسبه کنید

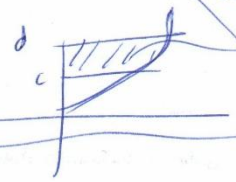
$$S=\int_0^2 x^2+1 = \frac{x^3}{3}+x\Big]_0^2=\left(\frac{8}{3}+2\right)-0=\frac{14}{3}$$

مثال) مطلوبست محاسبه سطح محصور بین منحنی تابع $y=\cos x$ و محور x ها ، خطوط قائم $x=\pi/2$ و $x=3\pi/2$

$$S=\int_{\pi/2}^{3\pi/2}\cos x\,dx=\sin x\Big]_{\pi/2}^{3\pi/2}=\sin(3\pi/2)-\sin(\pi/2)=\left|-1-1\right|$$

$$=2$$

برای محاسبه سطح محصور بین منحنی تابع $y=f(x)$ و محور y ها و دو خط $y=c$ و $y=d$ ابتدا x را برحسب y بدست آورده و سپس از انتگرال معین زیر استفاده می‌کنیم.



$$\Rightarrow S=\int_c^d x\,dy$$

مثال) مطلوبست محاسبه مساحت محصور بین منحنی تابع $y=x^2$ و محور y ها و دو خط $y=1$ و $y=4$ واقع در ناحیه اول محورهای مختصات

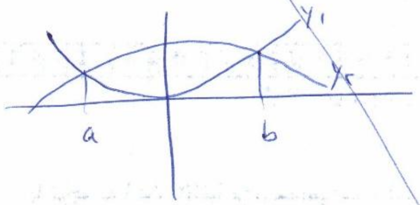
$$y=x^2 \Rightarrow x=\sqrt{y}$$

$$S=\int_1^4\sqrt{y}\,dy=\int_1^4 y^{1/2}\,dy=\frac{2y^{3/2}}{3}\Big]_1^4=$$

$$\frac{2\sqrt{y^3}}{3}\Big]_1^4=\left|\frac{16}{3}-\frac{2}{3}\right|=\frac{14}{3}$$

۴۹/

برای محاسبه سطح محصور بین منحنی دوتابع $y_2=f(x)$ و $y_1=f(x)$ در فاصله $[a,b]$ از ؛
انتگرال معین زیر استفاده می‌کنیم



$$S=\int_a^b (y_1-y_2)\,dx$$

مطلوب است محاسبه سطح محصور بین منحنی توابع $y=4$ و $y=x^2+2$

ابتدا محل تلاقی دو منحنی

$$\begin{cases} y=x^2+2 \\ y=4 \end{cases} \quad x^2+2=4 \Rightarrow x^2=4 \Rightarrow x=\pm 2$$

$$S=\int_{-2}^{2}(4-x^2-2)\,dx=\int_{-2}^{2}(4-x^2)\,dx=4x-\frac{x^3}{3}\Big]_{-2}^{2}$$

$$=\frac{32}{3}$$

ماتریس و دترمینان

آرایش یا مستطیلی که از اعداد یا حروف یا توابع که با نظم خاصی بصورت زیر نشان داده می‌شود

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \\ a_{m1} & a_{m2} \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}_{m \times n}$$

درایه
هر عضو ماتریس

تعداد سطر
تعداد ستون

a_{ij} شماره سطر ، شماره ستون

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 4 & 1 & 7 \\ 4 & -5 & 2 \end{bmatrix}$$

ماتریس مربع : به ماتریسی گفته می‌شود که تعداد سطر و ستون آن برابر باشد یعنی $m=n$ باشد

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 7 & 4 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 4 & 5 & 3 \\ 2 & 7 & 9 \end{bmatrix}$$

هر ماتریس مربع دارای دو قطر می‌باشد قطر اصلی و قطر فرعی. قطر اصلی عبارت از درایه‌های $a_{11}\, a_{22}\, a_{33}, \dots$

ماتریس سطری : به ماتریسی گفته می‌شود که فقط یک سطر دارد یعنی $m=1$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 3 & 2 \end{bmatrix}_{1 \times 4}$$

ماتریس ستونی : به ماتریسی گفته می‌شود که فقط یک ستون دارد

$$m = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

ماتریس 1×1 : به ماتریسی گفته می‌شود که فقط دارای یک عضو a_{11} است.

ماتریس صفر: به ماتریسی گفته می‌شود که تمام اعضای آن صفر باشند.

$$\bar{O}_{2\times 3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ماتریس قطری: به ماتریسی گفته می‌شود که تمام اعضای قطر اصلی آن، اعداد حقیقی و عناصر غیر قطر اصلی آن صفر باشند

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

ماتریس عددی (اسکالر): به ماتریس قطری گفته می‌شود که اعضای قطر اصلی آن باهم برابر باشند

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

ماتریس واحد: به ماتریس مربعی گفته می‌شود که اعضای قطر اصلی آن یک و بقیه اعضا صفر باشند.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ماتریس بالا مثلثی: به ماتریسی گفته می‌شود که تمام اعضای پایین قطر اصلی آن صفر باشد.

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

ماتریس پایین مثلثی: به ماتریسی گفته می‌شود که تمام اعضای بالای قطر اصلی آن صفر باشد

$$\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 6 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

ماتریس متقارن: ماتریس مربعی است که در آن ا به ازای تمام مقادیر i و j $a_{ij} = a_{ji}$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 5 \end{pmatrix} \qquad a_{23} = a_{32} = 4$$

تساوی دو ماتریس :

دو ماتریس زمانی با هم برابر هستند که اولاً هم مرتبه باشند و ثانیاً اعضای آن‌ها نظیر به نظیر با هم برابر باشند.

$$A=\begin{bmatrix}4 & 1\\ 5 & 2\end{bmatrix} \quad B=\begin{bmatrix}4 & 1\\ 5 & 2\end{bmatrix} \Rightarrow A=B$$

مثال : دو ماتریس $A=\begin{bmatrix}a & 2\\ 2c & 2d\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}1 & a+b\\ 4 & 1-b\end{bmatrix}$ با هم برابر هستند. a و b و c و d را تعیین کنید.

$a=1 \qquad a+b=2 \Rightarrow b=1$

$2c=4 \Rightarrow c=2 \qquad 2d=1-b \Rightarrow 2d=0 \Rightarrow d=0$

~~جمع ماتریس‌ها~~

جمع و تفریق ماتریس‌ها : اگر دو ماتریس هم مرتبه باشند برای جمع یا تفریق دو ماتریس ، اعضای ماتریس‌ها را نظیر به نظیر با هم جمع یا از هم تفریق می‌کنیم.

$$A=\begin{bmatrix}3 & 1\\ 5 & 4\end{bmatrix} \qquad B=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 5 & -4\end{bmatrix}$$

$$A+B=\begin{bmatrix}5 & 2\\ 10 & 1\end{bmatrix} \qquad A-B=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 5\end{bmatrix}$$

ضرب یک عدد در ماتریس

برای ضرب یک عدد در یک ماتریس کافی است آن عدد را در کلیه اعضای ماتریس ضرب کنیم.

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 6 & 5 & 2\end{bmatrix} \qquad -3A=\begin{bmatrix}-3 & -6 & -9\\ -18 & -15 & -6\end{bmatrix}$$

برای تقسیم یک ماتریس کافی است کلیه اعضای ماتریس را بر آن عدد تقسیم کنیم.

ترانهاده یک ماتریس :

اگر در یک ماتریس، جای سطر و ستون ها را با هم عوض کنیم ماتریسی به دست می‌آید که به ترانهاده معروف است که ترانهاده A را با A' نشان می‌دهند

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 3 & 7 \\ 1 & 4 & 5 \end{bmatrix} \Longrightarrow A' = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \\ 7 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\cancel{(A_{m\times n})' = A_{n\times m}} \qquad (A+B+C)' = A'+B'+C'$$

$$(A\times B\times C)' = C'\times B'\times A' \qquad (\lambda A)' = \lambda A'$$

ضرب ماتریس ها

دو ماتریس را در صورتی می‌توان ضرب کرد که تعداد ستون‌های ماتریس اول با تعداد سطرهای ماتریس دوم برابر باشند

$$A_{m\times n} \times B_{n\times p} = C_{m\times p}$$

$$A \begin{bmatrix} 1 & 5 & -1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 7 & 3 \end{bmatrix}_{3\times 3} \quad B=\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 5 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}_{3\times 2} \Rightarrow A\times B =$$

$$\begin{bmatrix} 1\times 2+5\times 1+-1\times 3 & 1\times 4+5\times 5+-1\times 2 \\ 2\times 2+3\times 1+4\times 5 & 2\times 4+3\times 5+4\times 2 \\ 1\times 2+7\times 1+3\times 3 & 1\times 4+7\times 5+3\times 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 27 \\ 27 & 31 \\ 18 & 45 \end{bmatrix}$$

a_{11} = سطر اول ماتریس اول به ترتیب در ستون اول ماتریس دوم ضرب و حاصل جمع اعداد به دست آمده

$a_{12} \Rightarrow$ سطر اول ماتریس × ستون دوم ماتریس دوم و حاصل جمع اعداد

به همین ترتیب برای کل درایه‌ها .

خواص ضرب ماتریس ها

۱- ضرب ماتریس ها دارای خاصیت جابجایی نیست $A \times B \neq B \times A$ مگر اینکه $A=B$.

۲- ضرب ماتریس ها دارای خاصیت توزیعی یا شرکت پذیری است

$A \times (B+C) = A \times B + A \times C$ $\quad A \times (B \times C) = (A \times B) \times C$

۳- اگر $A \times B = A \times C \nRightarrow C = B$

۴- فقط ماتریس مربعی می تواند در خودش ضرب شود.

۵- در ضرب ماتریس ها در ماتریس واحد، حاصلضرب هر ماتریس مربع در ماتریس واحد برابر است با خود ماتریس

$A \times I_n = A$