مثال) دامنهٔ تابع $y=\sqrt{\frac{x-1}{x^2-4}}$ را حساب کنید.

$x-1=0 \Rightarrow x=1$

$x^2-4=0 \Rightarrow x^2=4 \Rightarrow x=\pm 2$

x	$-\infty$ تا -2	-2 تا 1	1 تا 2	2 تا $+\infty$
$x-1$	-	-	+	+
x^2-4	+	-	-	+
	-	+ جواب	-	+ جواب

$D_f=(-2,+1]\cup(2,\infty)$

مثال) دامنهٔ تابع $y=\sqrt[4]{x^2-5x+6}$ را حساب کنید.

$x^2-5x+6=0 \Rightarrow (x-2)(x-3)=0$

x	$-\infty$ تا 2	2 تا 3	3 تا $+\infty$
x^2-5x+6	+	-	+
	+ جواب	-	+ جواب

$x-2=0 \Rightarrow x=2 \quad , \quad x-3=0 \Rightarrow x=3$

$D_f=(-\infty,2]\cup[3,+\infty)$

مثال) دامنهٔ تابع $y=\sqrt{\frac{-4}{2x-4}}$ را حساب کنید.

$2x-4=0 \Rightarrow 2x=4 \Rightarrow x=2$

x	$-\infty$ تا 2	2 تا $+\infty$
$2x-4$	-	+
	- جواب*	+

$D_f=(-\infty,2)$

* صورت کسر، منفی است و برای اینکه زیر رادیکال منفی نگردد باید در تعیین علامت، xهای منفی را انتخاب کنیم تا با منفی صورت مثبت گردند.

$f(x)=\sqrt[2n+1]{g(x)}$

$D_f=D_g$ می‌توان رادیکال را در نظر نگرفت

ب) توابع رادیکالی با فرجه فرد: برای تعیین دامنه این توابع، نیازی به تعیین علامت نیست چون زیر رادیکال می‌تواند منفی یا مثبت اختیار کند، بعنوان مثال:

$\sqrt[3]{8}=2 \qquad \sqrt[3]{-8}=-2$

لذا مانند توابع کثیرالجمله و کسری عمل می‌کنیم بدین صورت که اگر زیر رادیکال (با فرجهٔ فرد)، کثیرالجمله باشد، دامنهٔ آن برابر اعداد حقیقی (R) است، یعنی $D_f=(-\infty\ ,\ +\infty)$ یا $D_f=R$ و اگر زیر رادیکال (با فرجهٔ فرد) کسری باشد دامنهٔ آن برابر است با اعداد حقیقی (R) بجز مقادیری که مخرج کسر

را صفر می‌کنند یعنی، $D_f = R - \{$ریشه‌های مخرج$\}$

⇦ **مثال)** دامنهٔ تابع $y=\sqrt[5]{x^5+x^4+\sqrt{2}}$ را حساب کنید.

زیر رادیکال، کثیرالجمله است و فرجهٔ رادیکال، فرد است پس دامنهٔ این تابع، اعداد حقیقی (R) است:

$D_f = R$ یا $D_f = (-\infty , +\infty)$

⇦ **مثال)** دامنهٔ تابع $y=\sqrt[3]{\frac{x-3}{x+2}}$ را حساب کنید.

عبارت زیر رادیکال از نوع کسری است بنابراین، خواهیم داشت:

$D_f = R - \{$ریشه‌های مخرج$\}$ $\Rightarrow x+2=0 \Rightarrow x=-2 \Rightarrow D_f = R-\{-2\}$

⇦ **مثال)** دامنهٔ تابع $y=\sqrt[9]{\frac{-5}{x^8+1}}$ را حساب کنید.

$D_f = R - \{$ریشه‌های مخرج$\}$ $\Rightarrow x^8+1=0 \Rightarrow x^8=-1 \Rightarrow$ ریشه حقیقی ندارد.

$D_f = R - \{\ \} \Rightarrow D_f = R$ یا $D_f = (-\infty , +\infty)$

$y=\ln x \Rightarrow y=\log_e x \xrightarrow{\text{تعریف}} x=e^y$

$y=\log_b a \rightarrow \begin{cases} a>0 \\ b>0 \\ b\neq 1 \end{cases}$

۴ـ توابع لگاریتمی:

در این توابع، عبارت لگاریتمی باید بزرگتر از صفر باشد چون فقط اعداد مثبت لگاریتم دارند.

⇦ **مثال)** دامنهٔ توابع زیر را حساب کنید.

الف) $y=\log(x-3) \Rightarrow x-3>0 \Rightarrow x>3 \Rightarrow D_f=(3,\infty)$

ب) $y=\ln(x^2-1) \Rightarrow x^2-1>0 \Rightarrow x^2>1 \Rightarrow x>1$ یا $x<-1$

$D_f = (-\infty , -1) \cup (1 , +\infty)$

x	$-\infty$	-1		$+1$	$+\infty$
x^2-1	+	۰	-	۰	+
	+ جواب				+ جواب

محاسبه برد توابع جبری

مناسبترین روش برای پیداکردن برد این است که x را برحسب y بدست آورده و بمانند تعیین دامنه، عمل نماییم (دامنهٔ تابع بدست آمده را پیدا کنیم)

⇦ **مثال)** برد تابع $y=\frac{2x}{x-1}$ را حساب کنید.

x را برحسب y پیدا می‌کنیم:

$$y=\frac{۲x}{x-۱} \Rightarrow xy-y=۲x \Rightarrow xy-۲x=y \Rightarrow x(y-۲)=y \Rightarrow x=\frac{y}{y-۲}$$

$$y-۲=۰ \Rightarrow y=۲ \Rightarrow R_f=R-\{۲\}$$

روش سریع برای پیداکردن برد توابع کسری از نوع درجه اول:

اگر تابع $y=\frac{ax+b}{cx+d}$ را داشته باشیم برای بدست آوردن برد آن، از مجموعه اعداد حقیقی (R) عددی را کم می‌کنیم که از تقسیم ضریب x صورت (a) بر ضریب x مخرج (c) بدست می‌آید، یعنی:

$$R_f=R-\{\frac{a}{c}\}$$

مثال) برد تابع $y=\frac{۵x-۲}{۳x+۵}$ را حساب کنید.

$$R_f=R-\{\frac{۵}{۳}\}$$

مثال) برد توابع زیر را حساب کنید.

الف) $y=f(x)=\sqrt{x^۲+۴}$

x را برحسب y محاسبه می‌کنیم و مثل دامنه عمل می‌کنیم

$$\Rightarrow y=\sqrt{x^۲+۴} \Rightarrow y^۲=x^۲+۴ \Rightarrow x^۲=y^۲-۴ \Rightarrow \begin{cases} x=\pm\sqrt{y^۲-۴} \\ y^۲-۴=۰ \Rightarrow y=\pm ۲ \end{cases} \Rightarrow$$

y	$-\infty$ تا -۲	-۲ تا $+۲$	$+۲$ تا $+\infty$
$y^۲-۴$	+	-	+
	+ جواب		+ جواب

و چون می‌دانیم حاصل رادیکال‌های فرجهٔ زوج، منفی نمی‌شود پس، قسمت منفی را از R_f حذف می‌کنیم بنابراین:

$$R_f=[+۲ , +\infty)$$

ب) $y=۲x^۲-۶$

$$-۲x^۲=-y-۶ \Rightarrow ۲x^۲=y+۶ \Rightarrow x^۲=\frac{y+۶}{۲} \Rightarrow x=\pm\sqrt{\frac{y+۶}{۲}} \Rightarrow y+۶=۰ \Rightarrow y=-۶ \Rightarrow$$

y	$-\infty$ تا -۶	-۶ تا $+\infty$
$y+۶$	-	+
		+ جواب

$$\Rightarrow R_f=[-۶ , \infty)$$

ج) $y=\cos x-۳$

می‌دانیم:

$$-۱ \le \cos x \le ۱$$

از طرفین، ۳ را کم می‌کنیم:

$$-۱-۳ \le \cos x-۳ \le ۱-۳ \Rightarrow -۴ \le \cos x-۳ \le -۲$$

پس: $R_f = [-۴ , -۲]$

توابع یک به یک و پوششی

الف) توابع یک به یک: تابعی یک به یک است که هر خط موازی محور xها، نمودار آن را حداکثر در یک نقطه قطع کند.

فرض می‌کنیم f تابعی از A در B باشد. بنابه تعریف، f را تابع یک به یک خوانند، اگر:

$$f(x_۱) = f(x_۲) \Leftrightarrow x_۱ = x_۲$$

بعبارت دیگر، اگر در یک تابع مختص‌های دوم زوج‌های مرتب تکرار نشود آن تابع، یک به یک است و در غیر اینصورت تابع، یک به یک نیست.

مثال) کدامیک از توابع زیر یک به یک است؟

$f_۱ = \{(۱,۳) و (۲,۵) و (۳,۷) و (۴,۹)\} \Rightarrow$ تابع $f_۱$ یک به یک است.

$f_۲ = \{(-۱,۲) و (۰,۱) و (۱,۲) و (۲,۵)\}$

تابع $f_۲$ یک به یک نیست چون مختص دوم ۲، دوبار تکرار شده است

بعبارت دیگر: $f(-۱) = f(۱) \Leftrightarrow x_۱ \neq x_۲$

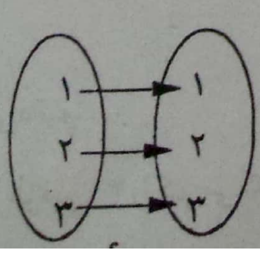
یا: $۲ = ۲ \Leftrightarrow -۱ \neq ۱$

تبصره) توابع هموگرافیک که ضابطهٔ $y = \frac{ax + b}{cx + d}$ را دارند همیشه یک به یک می‌باشند مانند تابع $y = \frac{۲x + ۱}{x + ۱}$.

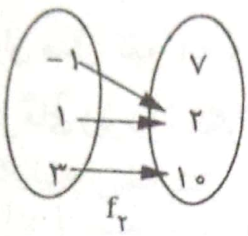
ب) توابع پوششی:

اگر در تابعی مثل f برای تمامی مختص‌های دوم، یک مختص اولی پیدا شود که آنها تشکیل یک زوج مرتب بدهند، به آن تابع، تابع پوششی گویند ولی اگر برای برخی از مختص‌های دوم، مختص اولی پیدا نشود، تابع، پوششی نیست. بعنوان مثال، پوششی بودن توابع زیر را با توجه به نمودار آنها بررسی می‌کنیم.

تابع $f_۱$ پوششی است زیرا برای تمام مختص‌های دوم، یک مختص اول



وجود دارد همچنین تابع فوق یک به یک هم می‌باشد چون مختص‌های دومِ زوج‌های مرتب آن تکرار نشده است.



تابع f_2 پوششی نیست زیرا برای مختص دومِ ۷، مختص اولی وجود ندارد همچنین تابع فوق یک به یک هم نمی‌باشد چون مختص دومِ ۲، دوبار تکرار شده است.

توجه داشته باشیم که یک به یک بودن تابع به هیچ وجه ارتباطی با پوششی بودن آن تابع ندارد.

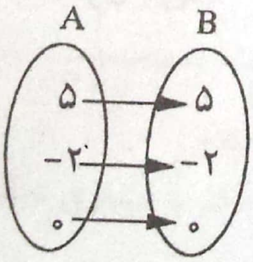
در توابع جبری برای بررسی اینکه آیا تابع، پوششی است یا نه، بدین ترتیب عمل می‌کنیم که اگر در ضابطهٔ تابع، برای x مقداری برحسب y بدست آید آن تابع، پوششی است. بعنوان مثال، پوششی بودن تابع $y = ۲x + ۵$ را بررسی می‌کنیم:

$$y = ۲x + ۵ \Rightarrow -۲x = -y + ۵ \Rightarrow ۲x = y - ۵ \Rightarrow x = \frac{y-۵}{۲}$$

چون در ضابطهٔ تابع فوق، برای x مقداری برحسب y بدست آمد این تابع، پوششی است.

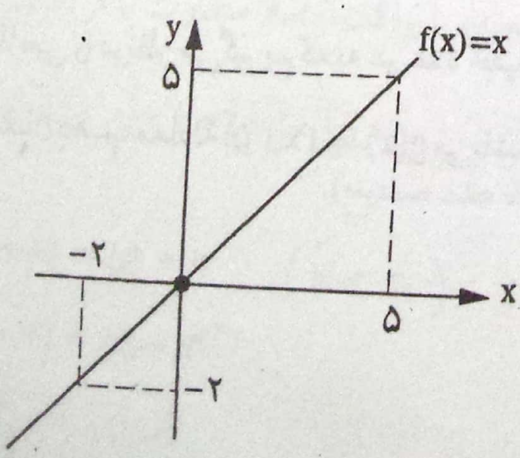
تابع همانی

به تابع $f(x) = x$ که در آن $\forall x \in D_f \Leftrightarrow f(x) = x$ ، تابع همانی گفته می‌شود بعنوان مثال، نمودار زیر نشان دهندهٔ تابع همانی می‌باشد.



$$\Rightarrow f(x) = x \; : \; f(۵) = ۵ \;،\; f(-۲) = -۲ \;،\; f(۰) = ۰$$

تابع فوق، هم یک به یک است و هم پوششی. شکل تابع همانی، نیمساز ربع اول و سوم در محورهای مختصات است (نمودار زیر را ببینید).



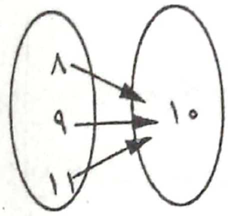
تابع ثابت

تابع f را ثابت گوییم هرگاه: $\forall x \in D_f : f(x) = c$ (c مقدار ثابت فرض شده است)

بعنوان مثال، تابع $y = ۱$ یک تابع ثابت نامیده می‌شود زیرا به ازای هر x ، مقدار ثابت ۱ نتیجه می‌شود.

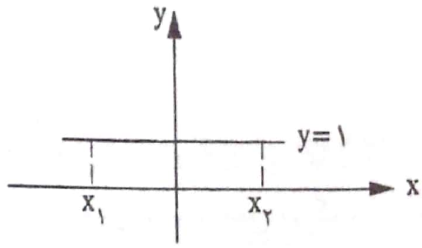
شکل‌های زیر نیز بیانگر تابع ثابت هستند:

الف)



$f(۸) = f(۹) = f(۱۱) = ۱۰$

ب)



$f(x_۱) = f(x_۲) = ۱$

$$f(x) = \begin{cases} k_1(x) & ; x \in D_1 \\ k_2(x) & ; x \in D_2 \\ \vdots & \vdots \\ k_m(x) & ; x \in D_m \end{cases} \Rightarrow D_f = D_1 \cup D_2 \cup \dots \cup D_m$$

تابع چند ضابطه‌ای

ممکن است یک تابع به جای یک ضابطه، چند ضابطه داشته باشد مانند تابع زیر که برای مقادیر مختلف x ضابطه‌های مختلف دارد:

$$f(x) = \begin{cases} ۳x-۱ & x>۳ \\ x^۲-۲ & -۲\leq x\leq ۳ \\ ۲x+۳ & x<-۲ \end{cases}$$

در مثال فوق داریم:

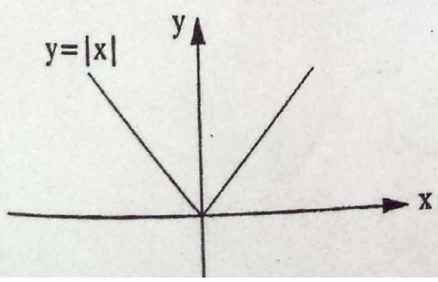
$f(۴) \Rightarrow$ ۴ در ضابطهٔ اول است $\Rightarrow f(۴) = ۳(۴) - ۱ = ۱۱$

$f(۰) \Rightarrow$ صفر در ضابطه دوم است $\Rightarrow f(۰) = (۰)^۲ - ۲ = -۲$

$f(-۵) \Rightarrow$ ۵- در ضابطهٔ سوم است $\Rightarrow f(-۵) = ۲(-۵) + ۳ = -۷$

تابع قدرمطلق

تابعی را درنظر می‌گیریم که به هر عدد حقیقی (مانند x)، عدد غیر منفی $|x|$ نظیر گردد اگر این تابع را با g نشان دهیم، معادلهٔ آن $g(x) = |x|$ می‌باشد که این تابع را تابع قدرمطلق خوانند. شکل زیر را ملاحظه کنید.



که قدرمطلق x بصورت زیر تعریف می‌شود:

$$|x| = \begin{cases} x & x \geq ۰ \\ -x & x < ۰ \end{cases}$$

بعنوان مثال، داریم:

$$|۳| = ۳ \quad ، \quad |-۲| = -(-۲) = ۲ \quad ، \quad |۰| = ۰$$

توجه داشته باشیم که $|x| = \sqrt{x^۲}$ می‌باشد، زیرا رادیکالهای با فرجه زوج نمی‌توانند منفی اختیار کنند.

$y=[x] \longrightarrow D=\mathbb{R}$ $\quad x-1\leq[x]<x \quad ; \quad [x+k]=[x]+k , k\in \mathbb{Z}$

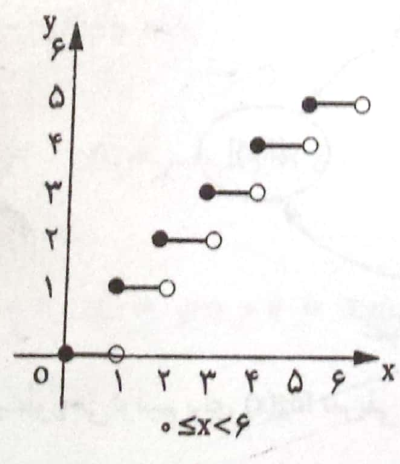
تابع جزء صحیح یا پله‌ای

$\forall x\in \mathbb{Z} \quad [x]+[-x]=۰ \quad ; \quad \forall x\notin \mathbb{Z} \rightarrow [x]+[-x]=-1 \quad ۰\leq x-[x]<1$

تابع $f = \{(x, y) : y = [x] , x\in R\}$ تابع پله‌ای یا جزء صحیح نامیده می‌شود که در آن، منظور از [x]، مقدار صحیح x می‌باشد یعنی به‌ازای هر $x \in R$ داریم، $n-۱ \leq x < n$ که در آن، $n \in z$ بوده و داریم $[x] = n - ۱$. بعنوان مثال، داریم:

$$[۱/۸] = ۱ \text{ ، } [۰/۵] = ۰ \text{ ، } [۳/۹۹۹] = ۳ \text{ ، } [۲] = ۲ \text{ ، } [-۳] = -۳ \text{ ، } [-۰/۷] = -۱$$

شکل این تابع در فاصلهٔ $۰ \leq x < ۶$ عبارتست از:



در این تابع، هنگامی که $۰\leq x<۱$ تغییر می‌کند همواره $y=۰$ است و زمانی که $۱\leq x<۲$ است همواره $y=۱$ می‌باشد. در نقاط $x = ۱$ و $x = ۲$ و ... و $x = ۶$ تابع جهش می‌کند.

بعبارت دیگر، جزء صحیح عددی مثل a، بزرگترین عدد صحیحی است که کوچکتر یا مساوی a باشد یا اینکه جزء صحیح یک عدد عبارتست از اولین عدد صحیح سمت چپ آن عدد. لازم به ذکر است که جزء صحیح را براکت نیز می‌گویند. توجه داشته باشیم که جزء صحیح یا براکت، کاملاً متفاوت با گردکردن و تقریب می‌باشد.

$\forall n\in \mathbb{N} \quad [nx]=[x]+[x+\frac{1}{n}]+[x+\frac{2}{n}]+\cdots$

تساوی زیر در مورد جزء صحیح یا براکت صادق است (K = عدد صحیح).

$$[x + k] = [x] + k \quad (k\in \mathbb{Z})$$

$$[x - ۳] = [x] - ۳$$

بعنوان مثال، داریم:

نکته: اگر f و g معکوس هم باشند $fog(x)=x$

اگر f و g معکوس پذیر باشند $(fog)^{-1}=g^{-1}of^{-1}$

تابع حقیقی

تابع f را تابع حقیقی گوییم هرگاه داشته باشیم: $D_f = R_f = R$. بعبارت دیگر، به توابعی که برد و دامنه آنها اعداد حقیقی باشد، توابع حقیقی گفته می‌شود، مانند تابع زیر:

$$y = f(x) = ۳x^۳ + ۵$$

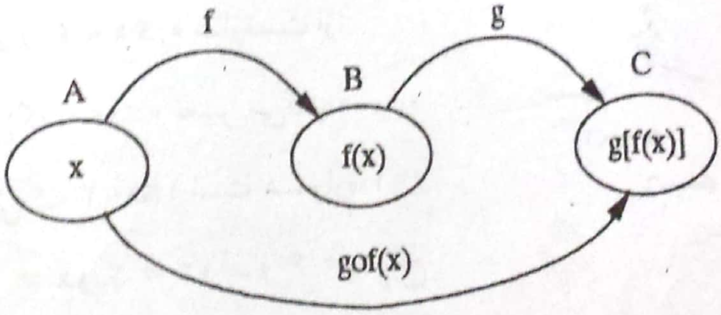
ولی تابعی مثل $y = x^۴$ یک تابع حقیقی محسوب نمی‌شود بدلیل اینکه دامنه تابع، اعداد حقیقی است ولی برد آن برابر است با اعداد حقیقی مثبت (R^+) نه R، یعنی تابع فوق در حوزهٔ مقادیرش، اعداد منفی را ندارد.

$D_{fog}=\{x\in D_g \mid g(x)\in D_f\}$

$D_{gof}=\{x\in D_f \mid f(x)\in D_g\}$

تابع مرکب یا تابعِ تابع

دو تابع f و g را در نظر می‌گیریم، در شکل زیر، تابع f، x را به f(x) منتقل می‌کند و تابع g، f(x) را به g[f(x)] می‌بَرد، می‌خواهیم تابعی بنویسیم که x را مستقیماً به g[f(x)] ببرد، چنین تابعی را gof(x) یا تابع مرکب می‌نامیم.



نمودار ۳-۱: نمایش تابع مرکب

و همینطور می‌توانیم برای fog(x) تعریفی بنویسیم. توابع مرکب fog(x) و gof(x) عبارتند از:

$fog(x) = f(g(x)) \Rightarrow$ یعنی در تابعِ f بجای x، g(x) را قرار می‌دهیم

$gof(x) = g(f(x)) \Rightarrow$ یعنی در تابعِ g بجای x، f(x) را قرار می‌دهیم

مثال) اگر دو تابع $f(x) = x+۵$ و $g(x) = x^۲-۱$ را داشته باشیم، مطلوبست محاسبهٔ توابع مرکب fog(x) و gof(x).

$$fog(x) = f(g(x)) = f(x^۲ - ۱) \xlongequal{\text{درتابع f بجای x، } x^۲-۱ \text{ را قرار می‌دهیم}} (x^۲ - ۱) + ۵ = x^۲ + ۴$$

$$gof(x)=g(f(x))=g(x+۵) \xlongequal{\text{درتابع g بجای x، } x+۵ \text{ را قرار می‌دهیم}} (x+۵)^۲-۱=x^۲+۲۵+۱۰x-۱=x^۲+۱۰x+۲۴$$

مثال) اگر $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$ و $g(x) = \frac{2x+1}{x+1}$ باشد، fog(x) و gof(x) را محاسبه کنید.

$$fog(x) = f(g(x)) = f(\frac{2x+1}{x+1}) = \frac{\frac{2x+1}{x+1}+1}{\frac{2x+1}{x+1}-1} = \frac{\frac{2x+1+x+1}{x+1}}{\frac{2x+1-x-1}{x+1}} = \frac{3x+2}{x}$$

$$gof(x) = g(f(x)) = g(\frac{x+1}{x-1}) = \frac{2(\frac{x+1}{x-1})+1}{\frac{x+1}{x-1}+1} = \frac{\frac{2x+2+x-1}{x-1}}{\frac{x+1+x-1}{x-1}} = \frac{3x+1}{2x}$$

مثال) اگر $f(x) = x+5$ و $fog(x) = x-1$ باشد، g(x) را پیدا کنید.

$$fog(x) = f(g(x)) \Rightarrow f(g(x)) = x-1 \xrightarrow{\text{درتابع f بجای x، g(x) را قرار می‌دهیم}} g(x)+5 = x-1 \Rightarrow \boxed{g(x) = x-6}$$

مثال) اگر $f(x) = x+3$، $g(x) = \log x$ و $h(x) = 5x$ باشد، مطلوبست محاسبهٔ تابع مرکب hogof(x).

$$hogof(x) = h[gof(x)] = h[g(f(x))] = h[g(x+3)] = h[\log(x+3)] = 5\log(x+3)$$

پس:

$$\boxed{hogof(x) = 5\log(x+3)}$$

تبصرهٔ ۱) اگر $f(x) = x$ باشد، در اینصورت خواهیم داشت: $fog(x) = g(x)$

زیرا: $fog(x) = f(g(x)) \Rightarrow$ درتابع f بجای x، g(x) را قرار می‌دهیم $\Rightarrow fog(x) = g(x)$

تبصرهٔ ۲) اگر $g(x) = x$ باشد در اینصورت خواهیم داشت: $fog(x) = f(x)$

زیرا: $fog(x) = f(g(x)) \Rightarrow g(x) = x \Rightarrow fog(x) = f(x)$

تبصرهٔ ۳) اگر تابع f(x) مفروض باشد، داریم: $fof(x) = f(f(x))$

عملیات جبری بر روی توابع

اگر دو تابع f(x) و g(x) را داشته باشیم، می‌توانیم یک سری عملیات جبری بر روی این دو تابع اعمال کنیم، از جمله اعمال جمع و تفریق و یا ضرب و تقسیم دو تابع، که در ذیل، نحوهٔ این عملیات بصورت یک رابطه بیان گردیده است:

۱) $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$

۲) $(f-g)(x) = f(x) - g(x)$

۳) $(f.g)(x) = f(x) . g(x)$

$D_{f+g} = D_{f-g} = D_{f.g} = D_f \cap D_g$

۴) $(\frac{f}{g})(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \quad , \quad g(x) \neq 0$ $\qquad D_{f/g} = D_f \cap D_g - \{g=0\}$

مثال) اگر دو تابع $f(x) = x^2+5$ و $g(x) = x^2$ را داشته باشیم، مطلوبست محاسبهٔ هر یک از عبارات زیر:

الف) $(f+g)(x)$ ب) $(f-g)(x)$ ج) $(f.g)(x)$ د) $(\frac{f}{g})(x)$

همچنین دامنه و برد تابع حاصله از عملیات ج و د را نیز بدست آورید.

الف) $(f+g)(x) = f(x) + g(x) = (x^2+5) + (x^2) = x^2+x^2+5 = 2x^2+5$

ب) $(f-g)(x) = f(x) - g(x) = (x^2+5) - (x^2) = x^2+5-x^2 = 5$

ج) $(f.g)(x) = f(x) \,.\, g(x) = (x^2+5)(x^2) = x^4+5x^2$

دامنه تابع بدست آمده، برابر اعداد حقیقی است چون یک تابع کثیرالجمله است. $D_{(f.g)(x)} = R$

برد تابع بدست آمده، برابر با اعداد حقیقی مثبت و عدد صفر است چون به‌ازای هر x، مقدار حاصله در این تابع، مثبت است. $R_{(f.g)(x)} = R^+ \cup \{0\}$

د) $(\frac{f}{g})(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{(x^2+5)}{(x^2)}$

دامنه تابع بدست آمده، برابر است با اعداد حقیقی بغیر از ریشه‌های مخرج:

پس: $x^2 = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow D_{(f/g)(x)} = R - \{0\}$

برای محاسبهٔ برد تابع فوق بصورت زیر عمل می‌کنیم:

ابتدا مقدار x را برحسب y بدست آورده سپس دامنهٔ تابع بدست آمده را حساب می‌کنیم، یعنی:

$$y = \frac{x^2+5}{x^2} \Rightarrow x^2y = x^2+5 \Rightarrow x^2y - x^2 = 5 \Rightarrow x^2(y-1) = 5 \Rightarrow x^2 = \frac{5}{y-1}$$

$$\Rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{5}{y-1}} \Rightarrow y-1=0 \Rightarrow y=1 \Rightarrow$$

y	$-\infty$	۱	$+\infty$
y-۱	-		+
جواب			+

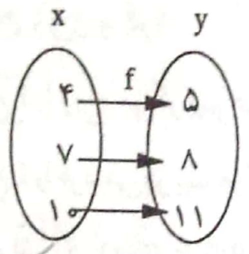
پس برد تابع فوق، $R_f = (1 , \infty)$ می‌باشد.

معکوس یک تابع

اگر تابع $f = \{(x , y) : (x , y) \in f\}$ را داشته باشیم، معکوس یا وارون آن بصورت زیر تعریف می‌شود:

$$f^{-1} = \{(y , x) : (x , y) \in f\}$$

یعنی اگر تابع f، یک به یک و پوششی باشد معکوس یا وارون آن تابع در صورتی بدست می‌آید که در این تابع، جای مختص‌های اول و دوم را عوض کنیم، بعنوان مثال در شکل زیر داریم:



$f = \{(۴,۵)$ و $(۷,۸)$ و $(۱۰,۱۱)\}$

$\Rightarrow$

$f^{-۱} = \{(۵,۴)$ و $(۸,۷)$ و $(۱۱,۱۰)\}$

تابع (f^{-1}) بدست می‌آید

نحوهٔ بدست آوردن معکوس یا وارون یک تابع: جای مولفه‌های اول و دوم را عوض کنیم، وارون

ابتدا در ضابطهٔ تابع، x را برحسب y بدست می‌آوریم و سپس در ضابطهٔ بدست آمده، جای x و y را عوض می‌کنیم. به مثالهای زیر توجه کنید.

$D_f = R_{f^{-1}}$ & $R_f = D_{f^{-1}}$

مثال) ضابطهٔ معکوس توابع زیر را بدست آورید.

شرط وارون پذیری یک تابع آن است که یک به یک باشد

۱) $y = ۳x + ۵$

ابتدا x را برحسب y بدست می‌آوریم: $-۳x = -y+۵ \Rightarrow ۳x = y-۵ \Rightarrow x = \frac{y-۵}{۳}$

در ضابطهٔ بدست آمده، جای x و y را عوض می‌کنیم: $x = \frac{y-۵}{۳} \Rightarrow y = \frac{x-۵}{۳}$

و می‌گوییم تابع $y = \frac{x-۵}{۳}$ معکوس یا وارون تابع $y = ۳x+۵$ می‌باشد.

۲) $y = \frac{۲x}{۲x-۱}$

ابتدا x را برحسب y محاسبه می‌کنیم:

$$۲xy - y = ۲x \Rightarrow ۲xy - ۲x = y \Rightarrow x(۲y - ۲) = y \Rightarrow x = \frac{y}{۲y - ۲}$$

در ضابطهٔ بدست آمده، جای x و y را عوض می‌کنیم:

$$y = \frac{x}{۲x - ۲}$$

۳) $y = -۲ + \sqrt{x + ۱} \xrightarrow[\text{y بدست می‌آوریم}]{\text{x را برحسب}} y + ۲ = \sqrt{x + ۱} \Rightarrow (y + ۲)^۲ = x + ۱ \Rightarrow$

$$\Rightarrow x = (y + ۲)^۲ - ۱ \xrightarrow{\text{جای x و y را عوض می‌کنیم}} y = (x + ۲)^۲ - ۱$$

تبصرهٔ ۱) اگر جای دامنه و برد تابع اصلی را عوض کنیم دامنه و برد تابع معکوس بدست می‌آید.

$Ln(0) = \infty$
$Ln(1) = 0$

تبصرهٔ ۲) تابع معکوس $y = Ln\,x$ عبارتست از $y = e^x$، چون:

$$y = Ln\,x \Rightarrow y = \log_e x \xrightarrow{\text{طبق تعریف نگاریتم}} x = e^y \xrightarrow{\text{جای x و y را عوض می‌کنیم}} y = e^x$$

مثال) تابع معکوس $y = Ln(x + ۲)$ را بدست آورید.

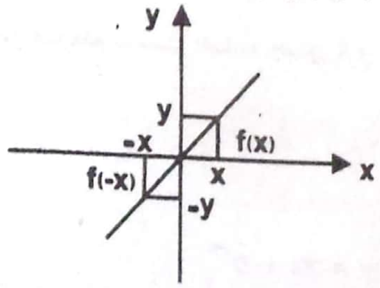
$$y = Ln(x + ۲) \Rightarrow e^{y} = (x + ۲) \Rightarrow e^{y} - ۲ = x \Rightarrow y = e^{x} - ۲$$

تابع زوج و فرد

تابع f را زوج می‌گوییم هرگاه الف) $\forall x \in D_f \ , \ -x \in D_f$ ب) $f(x) = f(-x)$

تابع f را فرد می‌گوییم هرگاه الف) $\forall x \in D_f \ , \ -x \in D_f$ ب) $f(-x) = -f(x)$

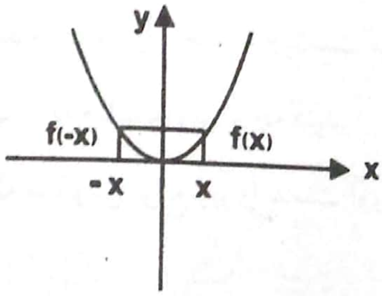
در واقع اگر $f(x) = f(-x)$ باشد گوییم تابع، زوج است و اگر $f(-x) = -f(x)$ باشد گوییم تابع، فرد است به شکلهای زیر توجه کنید:



نمودار ۳-۲ نمایش تابع فرد

تابع، فرد است $f(-x) = -f(x)$

$-y = -(y)$



نمودار ۳-۳ : نمایش تابع زوج

تابع، زوج است $f(x) = f(-x)$

$y = y$

نکتهٔ مهم: ملاحظه می‌کنیم که در منحنی تابع زوج، محور yها، محور تقارن است و در منحنی تابع فرد، مبدأ مختصات محور تقارن است.

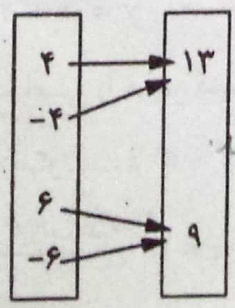
طرز تشخیص زوج و فرد بودن تابع

اگر در ضابطهٔ یک تابع بجای x قرینهٔ آن یعنی x- را قرار دهیم و پس از ساده نمودن، تابع اول یعنی f(x) بدست آید به آن تابع، تابع زوج می‌گوییم $[f(x) = f(-x)]$ و اگر در ضابطهٔ تابع به جای x قرینهٔ آن یعنی x- را قرار دهیم و پس از ساده نمودن، قرینهٔ تابع اول یعنی $-f(x)$ بدست آید به آن تابع، تابع فرد می‌گوییم یعنی $[f(-x) = -f(x)]$ (به شکلهای زیر توجه کنید) در غیراینصورت تابع، نه فرد است و نه زوج.

نکته: ترکیب دو تابع زوج، زوج است.

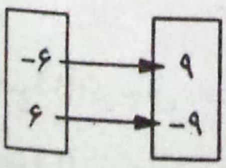
ترکیب دو تابع فرد، فرد است.

ترکیب دو تابع زوج و فرد، زوج می‌باشد.



تابع زوج $f(۴) = f(-۴)$

$۱۳ = ۱۳$



تابع فرد $f(-۶) = -f(۶)$

$۹ = -(-۹)$

تساوی دو تابع: دو تابع f و g را مساوی گوییم هرگاه دو شرط زیر برقرار باشد

الف) دامنه دو تابع مساوی باشند $D_f = D_g$

ب) به ازای هر عضو از دامنه، دو تابع مقدار یکسانی داشته باشند.

$\forall x \in D_{f,g} \to f(x)=g(x)$

⇚ **مثال)** کدامیک از توابع زیر زوج و کدامیک فرد است؟

الف) $f(x) = x^5 + x^3 \Rightarrow f(-x) = (-x)^5 + (-x)^3 \Rightarrow f(-x) = -x^5 - x^3$

$\Rightarrow f(-x) = -(x^5 + x^3) \Rightarrow f(-x) = -f(x) \Rightarrow$ تابع، فرد است.

اول $f(-x)$ را بدست می‌آوریم بعد ساده می‌کنیم و ملاحظه می‌کنیم که $f(-x)$ قرینه $f(x)$ است پس تابع، فرد است.

ب) $f(x) = -4x^4 + \frac{x^2}{2}$

$\Rightarrow f(-x) = -4(-x)^4 + \frac{(-x)^2}{2} = -4x^4 + \frac{x^2}{2} \Rightarrow f(-x) = f(x) \Rightarrow$ تابع، زوج است.

یادآوری)

۱) $\sin(-x) = -\sin x$ ۲) $\cos(-x) = \cos x$

۳) $tg(-x) = -tgx$ ۴) $cotg(-x) = -cotgx$

۵) $|-x| = |x|$

⇚ **مثال)** نوع توابع زیر را از نظر فرد یا زوج بودن مشخص کنید.

۱) $y = f(x) = x^3 - 3x + 4$

$f(-x) = (-x)^3 - 3(-x) + 4 = -x^3+3x+4 \Rightarrow f(-x) \neq f(x)$ و $f(-x) \neq -f(x)$

پس تابع، نه فرد است و نه زوج.

۲) $y = \frac{|x| - 5\sin x}{x^2 - 4\cos x}$

$\Rightarrow f(-x) = \frac{|-x| - 5\sin(-x)}{(-x)^2 - 4\cos(-x)} = \frac{|x| + 5\sin x}{x^2 - 4\cos x} \Rightarrow f(-x) \neq f(x)$ و $f(-x) \neq -f(x)$

تابع، نه زوج است و نه فرد.

۳) $y = |x| - 5\cos x$

$f(-x) = |-x| - 5\cos(-x) = |x| - 5\cos x \Rightarrow f(-x) = f(x) \Rightarrow$ تابع، زوج است.

۴) $y = \frac{x^3 + x}{x^2 + \cos x}$

$\Rightarrow f(-x) = \frac{(-x)^3 + (-x)}{(-x)^2 + \cos(-x)} = \frac{-x^3-x}{x^2+\cos x} \Rightarrow f(x) \neq f(-x) \Rightarrow$

$\Rightarrow -f(x) = -(\frac{x^3+x}{x^2+\cos x}) = \frac{-x^3-x}{x^2+\cos x} \Rightarrow f(-x) = -f(x) \Rightarrow$ تابع، فرد است.

۳) $F_۴ = \{(-۲,۲)$ و $(-۱,۱)$ و $(۱,-۱)\}$

حل)

۱) رابطهٔ $F_۱$، تابع نیست چون به‌ازای $x = ۱$، هم داریم $y = ۲$ و هم $y = ۸$.

۲) رابطهٔ $F_۲$، تابع است چون مختص‌های اول یکسانی ندارد و به‌ازای xهای متفاوت، yهای متفاوتی دارد، پس:

$D_{F_۲} = \{۲,۴,۶\} \quad , \quad R_{F_۲} = \{۳,۶,۹\} \quad , \quad F_۲^{-۱} = \{(۳,۲),(۶,۴),(۹,۶)\}$

۳) رابطهٔ $F_۳$، تابع است بدلیل اینکه زوج مرتب (۱۳ , ۱۰) دوبار تکرار شده است که یک زوج مرتب محسوب می‌شود، بنابراین داریم: $F_۳ = \{(۷,۱۰)$ و $(۱۰,۱۳)$ و $(۱۳,۱۶)\}$، پس:

$D_{F_۳} = \{۷,۱۰,۱۳\} \quad , \quad R_{F_۳} = \{۱۰,۱۳,۱۶\} \quad , \quad F_۳^{-۱} = \{(۱۰,۷),(۱۳,۱۰),(۱۶,۱۳)\}$

۴) رابطهٔ $F_۴$، تابع است چون مختص‌های اول یکسانی ندارد و به‌ازای xهای متفاوت، yهای متفاوتی دارد، پس:

$D_{F_۴} = \{-۲,-۱,۱\} \quad , \quad R_{F_۴} = \{۲,۱,-۱\} \quad , \quad F_۴^{-۱} = \{(۲,-۲),(۱,-۱),(-۱,۱)\}$

دامنه یا حوزهٔ تعریف توابع زیر را تعیین کنید.

۵) $y = ۳x^۳ + ۲x^۲ + ۵$

۶) $y = \sqrt{۲}x^۲ + x + ۱$

۷) $y = \dfrac{۲x + ۱}{x + ۲}$

۸) $y = \dfrac{۵x + ۵}{x^۲ + ۳x - ۴}$

۹) $\dfrac{۵}{x^۲ + ۹}$

۱۰) $y = \sqrt{x - ۳}$

۱۱) $y = \sqrt{x^۲ + x}$

۱۲) $y = \sqrt{\dfrac{x - ۱}{x^۲ - ۱}}$

۱۳) $y = \dfrac{x - ۳}{\sqrt{x + ۳}}$

۱۴) $y = \dfrac{۱}{\sqrt{x - x^۲}}$

۱۵) $y = \log(x - ۳) - \log(x + ۳)$

۱۶) $y = \log \dfrac{x - ۱}{x^۲ + ۱}$

۱۷) $y = \sqrt[۳]{x^۲ + x - ۲}$

۱۸) $y = \sqrt[۵]{\dfrac{x - ۵}{x + ۵}}$

حل)

۵) $y = ۳x^۳ + ۲x^۲ + ۵ \Rightarrow D_f = R = (-\infty , +\infty)$

۶) $y = \sqrt{۲}x^۲ + x + ۱ \Rightarrow D_f = R = (-\infty , +\infty)$

۷) $y = \dfrac{۲x + ۱}{x + ۲} \Rightarrow D_f = R - \{\text{ریشه‌های مخرج}\} \Rightarrow x + ۲ = ۰ \Rightarrow \boxed{x = -۲}$

Scanned by CamScanner

$\Rightarrow D_f = R - \{-۲\}$

۸) $y = \dfrac{۵x+۵}{x^۲+۳x-۴} \Rightarrow D_f = R - \{$ریشه‌های مخرج$\} \Rightarrow x^۲+۳x-۴ = ۰$

$\Rightarrow (x-۱)(x+۴) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} x-۱=۰ \\ x+۴=۰ \end{cases} \Rightarrow \boxed{x=۱\ ,\ x=-۴}$

$\Rightarrow D_f = R - \{-۴\ ,\ ۱\}$

۹) $y = \dfrac{۵}{x^۲+۹} \Rightarrow D_f = R - \{$ریشه‌های مخرج$\} \Rightarrow x^۲+۹ = ۰ \Rightarrow x^۲=-۹ \Rightarrow$ ریشهٔ حقیقی ندارد.

$\Rightarrow D_f = R - \{\ \} \Rightarrow D_f = R$

۱۰) $y = \sqrt{x-۳} \Rightarrow x-۳ = ۰ \Rightarrow x = ۳ \Rightarrow$

x	$-\infty$		۳		$+\infty$
$x-۳$		$-$		$+$	
				+ جواب	

$\Rightarrow D_f = [۳\ ,\ +\infty)$

۱۱) $y = \sqrt{x^۲+x} \Rightarrow x^۲+x = ۰ \Rightarrow x(x+۱) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} x=۰ \\ x+۱=۰ \Rightarrow x=-۱ \end{cases}$

x	$-\infty$		-۱		۰		$+\infty$
$x^۲+x$		$+$		$-$		$+$	
		+ جواب				+ جواب	

$\Rightarrow D_f = (-\infty, -۱] \cup [۰, \infty)$

۱۲) $y = \sqrt{\dfrac{x-۱}{x^۲-۱}} \Rightarrow \begin{cases} x-۱=۰ \Rightarrow x=۱ \\ x^۲-۱=۰ \Rightarrow x^۲=۱ \Rightarrow x=\pm۱ \end{cases} \Rightarrow$

x	$-\infty$		-۱		۱		$+\infty$
$x-۱$		$-$		$-$		$+$	
$x^۲-۱$		$+$		$-$		$+$	
				+ جواب		+ جواب	

$\Rightarrow D_f = (-۱\ ,\ ۱) \cup (۱\ ,\ \infty)$

۱۳) $y = \dfrac{x-۳}{\sqrt{x+۳}} \Rightarrow x+۳=۰ \Rightarrow x=-۳ \Rightarrow$

x	$-\infty$		-۳		$+\infty$
$x+۳$		$-$		$+$	
				+ جواب	

$\Rightarrow D_f = (-۳\ ,\ \infty)$

۱۴) $y = \dfrac{۱}{\sqrt{x-x^۲}} \Rightarrow x-x^۲ = ۰ \Rightarrow x(۱-x) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} x=۰ \\ ۱-x=۰ \Rightarrow x=۱ \end{cases}$

x	$-\infty$		۰		۱		$+\infty$
$x-x^۲$		$-$		$+$		$-$	
				+ جواب			

$\Rightarrow D_f = (۰\ ,\ ۱)$

۱۵) $y = \log(x-۳) - \log(x+۳) \Rightarrow \begin{cases} x-۳>۰ \Rightarrow x>۳ \\ x+۳>۰ \Rightarrow x>-۳ \end{cases}$ اشتراک این دو جواب : $x>۳$

y	$-\infty$	0	$+\infty$
y^2	+		+
$1+y^2$	+		+
	+ جواب		+ جواب

#۱ تمام علامتها موافق علامت y^2

#۲ تمام علامتها موافق علامت y^2

$\Rightarrow R_f = R = (-\infty, +\infty)$

۳۲) $y=\frac{1}{1-x^2} \Rightarrow y-x^2y=1 \Rightarrow -x^2y=1-y \Rightarrow x^2=\frac{1-y}{-y} \Rightarrow x^2=\frac{y-1}{y} \Rightarrow x=\pm\sqrt{\frac{y-1}{y}}$

$\Rightarrow \begin{cases} y-1=0 \Rightarrow y=1 \\ y=0 \end{cases} \Rightarrow$

y	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$y-1$	−	−	+	
y	−	+	+	
	+ جواب	−	+ جواب	

$\Rightarrow R_f = (-\infty, 0) \cup [1, \infty)$

کدامیک از توابع زیر یک به یک است؟

۳۳) $y=\frac{3x+1}{2x-1}$ ۳۴) $y=3x+5$ ۳۵) $y=2x^2+1$

۳۶) $y=x^3+5$ ۳۷) $y=5^x$ ۳۸) $y=2+\sqrt[3]{x^3+1}$

۳۹) $y=\sqrt{x^2+9}$ ۴۰) $y=\frac{x^2-1}{x^2}$ ۴۱) $y=x^2\sqrt{x^2+1}$

حل)

۳۳) یک به یک است ۳۴) یک به یک است ۳۵) یک به یک نیست

۳۶) یک به یک است ۳۷) یک به یک است ۳۸) یک به یک است

۳۹) یک به یک نیست ۴۰) یک به یک نیست ۴۱) یک به یک نیست

نمودار توابع پله‌ای یا جزء صحیح زیر را در فاصلهٔ $-2 \le x < 2$ رسم کنید.

۴۲) $y = [x] + 2$ ۴۳) $y = [x] + x$

حل)

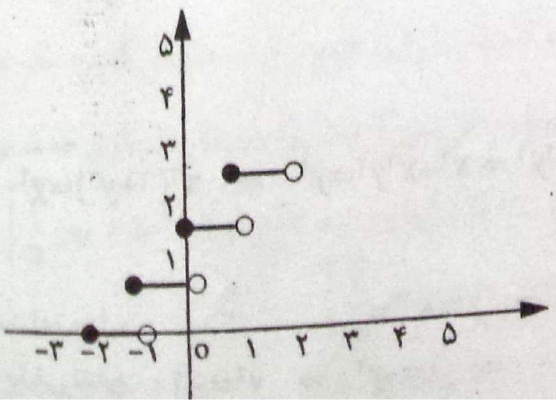
اگر $-2 \le x < -1 \Leftarrow$ همواره $y = 0$

اگر $-1 \le x < 0 \Leftarrow$ همواره $y = 1$

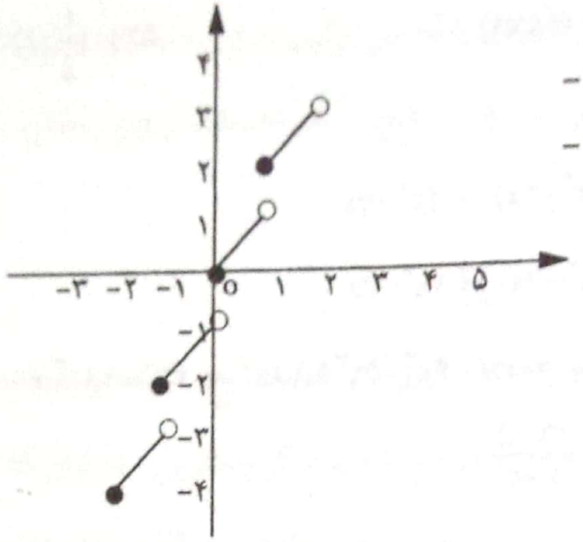
اگر $0 \le x < 1 \Leftarrow$ همواره $y = 2$

اگر $1 \le x < 2 \Leftarrow$ همواره $y = 3$

۴۲)



۴۳)



اگر $-۲ \le x < -۱$ ⇐ همواره $-۴ \le y < -۳$

اگر $-۱ \le x < ۰$ ⇐ همواره $-۲ \le y < -۱$

اگر $۰ \le x < ۱$ ⇐ همواره $۰ \le y < ۱$

اگر $۱ \le x < ۲$ ⇐ همواره $۲ \le y < ۳$

اگر $f(x) = ۳x+۵$ و $g(x) = \frac{-x-۱}{۱+۲x}$ باشد مطلوبست محاسبهٔ هر یک از عبارات زیر:

۴۴) $fog(x)$ ۴۵) $gof(x)$ ۴۶) $fof(x)$ ۴۷) $gog(x)$

حل)

$$۴۴)\ fog(x) = f(g(x)) = f(\frac{-x-۱}{۱+۲x}) = ۳(\frac{-x-۱}{۱+۲x}) + ۵ = \frac{-۳x-۳}{۱+۲x} + ۵$$

$$۴۵)\ gof(x) = g(f(x)) = g(۳x+۵) = \frac{-(۳x+۵)-۱}{۱+۲(۳x+۵)} = \frac{-۳x-۵-۱}{۱+۶x+۱۰} = \frac{-۳x-۶}{۶x+۱۱}$$

$$۴۶)\ fof(x) = f(f(x)) = f(۳x+۵) = ۳(۳x+۵)+۵ = ۹x+۱۵+۵ = ۹x+۲۰$$

$$۴۷)\ gog(x) = g(g(x)) = g(\frac{-x-۱}{۱+۲x}) = \frac{-\frac{-x-۱}{۱+۲x}-۱}{۱+۲x\frac{-x-۱}{۱+۲x}} = \frac{\frac{x+۱-۱-۲x}{۱+۲x}}{\frac{۱+۲x-۲x-۲}{۱+۲x}} = \frac{-x}{-۱} = x$$

اگر $f(x^۲+۱) = x^۲+x$ مطلوبست محاسبهٔ هر یک از مقادیر زیر: $(x>۰)$

۴۸) $f(۲)$ ۴۹) $f(۱۰)$

حل) ابتدا، $f(x)$ را بدست می‌آوریم (به ترتیب زیر):

$$f(x^۲+۱) = x^۲+x \Rightarrow x^۲+۱ = t \Rightarrow x^۲ = t-۱ \Rightarrow x = \sqrt{t-۱}$$

مقدار x را در طرف دوم جاگذاری می‌کنیم. $\Rightarrow x^۲+x = (\sqrt{t-۱})^۲ + \sqrt{t-۱} = t-۱+\sqrt{t-۱}$

$$\Rightarrow f(t) = t-۱+\sqrt{t-۱} \Rightarrow f(x) = x-۱+\sqrt{x-۱}$$

$$۴۸)\ f(x) = x-۱+\sqrt{x-۱} \Rightarrow f(۲) = ۲-۱+\sqrt{۲-۱} = ۱+۱ = ۲$$

$$۴۹)\ f(x) = x-۱+\sqrt{x-۱} \Rightarrow f(۱۰) = ۱۰-۱+\sqrt{۱۰-۱} = ۹+۳ = ۱۲$$

اگر $f(x) = ۳x^۲-۵x$ و $g(x) = x^۲-۲x$ باشد، مطلوبست محاسبهٔ:

عدد منفی‌تری کسر خواهد شد بنابراین کوچکترین عددی را که می‌توانیم به x و y نسبت دهیم تا منفی نگردند عدد صفر است $(x = y = 0)$ که در اینصورت مقدار تابع، ۱ خواهد شد و این مقدار، حداکثر مقدار تابع خواهد بود، پس:

$$R_z = (-\infty , 1]$$

۵۷) در تابع $z = x^2+y^2+1$، برعکس تابع قبلی، هر چه x و y بزرگتر شوند تابع، مثبت‌تر خواهد شد و مقدار z رو به افزایش خواهد بود (حتی اگر اعداد منفی‌تری هم بدهیم)، کوچکترین مقداری که تابع به خود می‌گیرد عدد ۱ است که به‌ازای $x = y = 0$ حاصل می‌شود و این مقدار، حداقل مقدار تابع خواهد بود، پس:

$$R_z = [1 , \infty)$$

معکوس توابع زیر را تعیین کنید.

۵۸) $y = x+1$ ۵۹) $y = x^3-5$ ۶۰) $y = \frac{4x+6}{2x-2}$

۶۱) $y = \frac{x}{1-x}$ ۶۲) $y = Ln(3x^2+1)$ ۶۳) $y = Ln\frac{1}{1-x}$

۶۴) $y = Ln[Ln(x+1)]$ ۶۵) $y = (-2-x)^2$ ۶۶) $y = 5\sqrt[3]{(2-x)}$

۶۷) $y = e^x$ ۶۸) $y = e^{x^2}$ ۶۹) $y = 2^{2x}$

حل)

۵۸) $y = x+1 \Rightarrow x = y-1 \Rightarrow y^{-1} = x-1$

۵۹) $y = x^3-5 \Rightarrow x^3 = y+5 \Rightarrow x = \sqrt[3]{y+5} \Rightarrow y^{-1} = \sqrt[3]{x+5}$

۶۰) $y = \frac{4x+6}{2x-2} \Rightarrow 4x+6 = 2xy-2y \Rightarrow 4x-2xy = -2y-6 \Rightarrow x(4-2y) = -2y-6 \Rightarrow$

$\Rightarrow x = \frac{-2y-6}{4-2y} \Rightarrow y^{-1} = \frac{-2x-6}{4-2x}$ یا $y^{-1} = \frac{2x+6}{2x-4}$

۶۱) $y = \frac{x}{1-x} \Rightarrow x = y-xy \Rightarrow x+xy = y \Rightarrow x(1+y) = y \Rightarrow x = \frac{y}{1+y} \Rightarrow y^{-1} = \frac{x}{1+x}$

۶۲) $y = Ln(3x^2+1) \Rightarrow e^y = 3x^2+1 \Rightarrow 3x^2 = e^y-1 \Rightarrow x^2 = \frac{e^y-1}{3}$

$\Rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{e^y-1}{3}} \Rightarrow y^{-1} = \pm\sqrt{\frac{e^x-1}{3}}$

۶۳) $y = Ln\frac{1}{1-x} \Rightarrow e^y = \frac{1}{1-x} \Rightarrow e^y - xe^y = 1 \Rightarrow -xe^y = 1-e^y \Rightarrow x = \frac{1-e^y}{-e^y} \Rightarrow y^{-1} = \frac{e^x-1}{e^x}$

۶۴) $y = Ln\left[Ln(x+1)\right] \Rightarrow e^y = \left[Ln(x+1)\right] \Rightarrow e^{e^y} = x+1 \Rightarrow x = e^{e^y}-1 \Rightarrow y^{-1} = e^{e^x}-1$

حقیقه: اگر $\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$ ، $\lim_{x \to x_0} g(x) = +\infty$

آنگاه:

1) $\lim_{x \to x_0} [f(x) + g(x)] = +\infty$

2) $\lim_{x \to x_0} f(x) g(x) = +\infty$

1) $\frac{0}{\text{عدد}} = 0$

2) $\frac{\text{عدد}}{\pm\infty} = 0$

3) $\frac{\text{عدد}}{0} = \infty$

نکته: $\lim_{x \to x_0} [f(x) - g(x)] = \infty - \infty$ و $\lim \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\infty}{\infty}$ حد مبهم بوده ابتدا باید

معادل $f(x) - g(x)$ یا $\frac{f(x)}{g(x)}$ را بدست آورد و سپس حد معادل را حساب کرد

۴

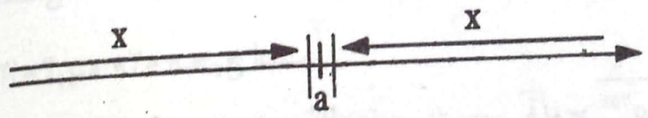
حد و پیوستگی

نکته: $\lim_{x \to -\infty} a x^n = \begin{cases} +\infty & n \text{ زوج} \\ -\infty & n \text{ فرد} \end{cases}$ ، $\lim_{x \to +\infty} a x^n = +\infty$ $(a > 0, n \in N)$

حد و پیوستگی

نتیجه: اگر a عدد ثابت و n عدد صحیح باشد $\lim_{x \to +\infty} \frac{a}{x^n} = 0$

حد متغیر: متغیر x و عدد ثابت a را در نظر می‌گیریم اگر x بی‌نهایت به a نزدیک شود (از سمت چپ یا راست) بطوریکه فاصلهٔ x تا a از هر عدد بسیار کوچکی مانند ε (اپسیلوَن) کمتر شود ولی x بر a منطبق نگردد در آنصورت می‌گویند x به سمت a میل می‌کند و یا بعبارت دیگر، حد x برابر a می‌باشد، که در شکل زیر نشان داده شده است:



$0 < |x - a| < \varepsilon$

حد تابع: تابع $y = f(x)$ را در نظر می‌گیریم. اگر x به سمت a میل کند یعنی بی‌نهایت به a نزدیک شود در آنصورت تابع $f(x)$ ممکنست به سمت عددی مانند L بی‌نهایت نزدیک شود که به آن، حد تابع می‌گویند و بصورت زیر نشان می‌دهند:

(حد $f(x)$ وقتی که x به‌سمت a میل می‌کند برابر با L است) $\lim_{x \to a} y = \lim_{x \to a} f(x) = L$

مثال) تابع $y = x + 1$ را در نظر می‌گیریم. اگر x به عدد ۳ نزدیک شود، y به عدد ۴ نزدیک می‌گردد. نزدیک شدن x به ۳ از دو سو امکانپذیر است؛ یکی اینکه با مقادیر کمتر از ۳ (از سمت چپ) به سمت ۳ میل کند و دیگر آنکه با مقادیر بزرگتر از ۳ (از سمت راست) به سمت ۳ میل کند که در جدول زیر نشان داده شده است:

x	۲/۸	۲/۹	۲/۹۵	۲/۹۹۹	۳/۰۰۰۱	۳/۰۱	۳/۱	۳/۲
y	۳/۸	۳/۹	۳/۹۵	۳/۹۹۹	۴/۰۰۰۱	۴/۰۱	۴/۱	۴/۲

تعریف: هرگاه x عدد حقیقی بوده و $\lim_{x\to x_0} f(x)=L$, $\lim g(x)=0$

$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L>0}{0^+} = +\infty$ $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L<0}{0^+} = -\infty$

$\lim \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L>0}{0^-} = -\infty$ $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L<0}{0^-} = +\infty$

بنابراین:
$$\lim_{x\to ۲} y = \lim_{x\to ۲}(x+۱) = ۴$$

و یا در تابع $f(x) = \frac{۲x-۲}{x}$، هنگامی که x به هر طریقی به سمت ۲ میل کند، f(x) به سمت ۱ میل می‌نماید، یعنی:
$$\lim_{x\to ۲} f(x)=\lim_{x\to ۲} \frac{۲x-۲}{x} = ۱$$

حد چپ و حد راست

منظور از حد چپ تابع f(x) در نقطهٔ x=a که با علامت $\lim_{x\to a^-} f(x)$ نمایش داده می‌شود، این است که حد تابع را در نقطهٔ x=a وقتی که x از سمت چپ (مقادیر کوچکتر از a) به a نزدیک می‌شود، بدست آوریم.

مثال) حد چپ تابع زیر را در نقطهٔ ۲ = x بدست آورید.

$$f(x)=\begin{cases} x+۱ & x\geq ۲ \\ ۱-x & x<۲ \end{cases}$$

حل)
$$\lim_{x\to ۲^-} f(x)=\lim_{x\to ۲^-} (۱-x)=۱-۲=-۱$$

یعنی اگر متغیر x از طرف مقادیر کوچکتر از ۲ به عدد ۲ نزدیک شود تابع f(x) به ۱- نزدیک می‌شود.

و منظور از حد راست تابع f(x) در نقطهٔ x = a که با علامت $\lim_{x\to a^+} f(x)$ نمایش داده می‌شود، این است که حد تابع را در نقطهٔ x = a وقتی که x از سمت راست (مقادیر بزرگتر از a) به a نزدیک می‌شود، بدست آوریم.

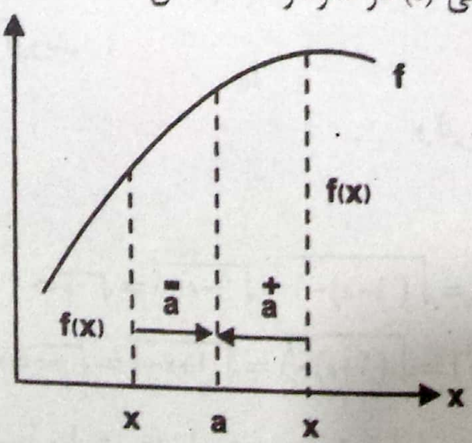
مثال) حد راست تابع زیر را در نقطهٔ ۱ = x بدست آورید.

$$f(x)=\begin{cases} ۲x+۱ & x\geq ۱ \\ -x+۶ & x<۱ \end{cases}$$

حل)
$$\lim_{x\to ۱^+} f(x)=\lim_{x\to ۱^+} (۲x+۱)=۲(۱)+۱=۳$$

یعنی اگر متغیر x از طرف مقادیر بزرگتر از ۱ به عدد ۱ نزدیک شود تابع f(x) به ۳ نزدیک می‌شود.

حد راست و چپ یک تابع فرضی (f) در نمودار ۴-۱ نشان داده شده است:



در شکل فوق، نحوهٔ نزدیک شدن x به a نشان داده شده است طوریکه در حد چپ، x از سمت مقادیر کوچکتر از a به عدد a نزدیک می‌شود (a^-) و در حد راست، x از سمت مقادیر بزرگتر از a به عدد a نزدیک می‌شود (a^+) ولی بر عدد a منطبق نمی‌شوند، یعنی:

$$a^- = a - \varepsilon \,,\, a^+ = a + \varepsilon$$

حد تابع در یک نقطه

منظور از حد تابع $f(x)$ در نقطهٔ $x=a$ این است که حد چپ و حد راست تابع $f(x)$ را در این نقطه بدست آوریم واگر این دو حد با هم برابر شدند گوییم تابع $f(x)$ در نقطه $x=a$ دارای حد می‌باشد که آن را با علامت $\lim_{x\to a} f(x)$ نمایش می‌دهیم بنابراین، داریم:

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a^-} f(x) = \lim_{x\to a^+} f(x)$$

توجه داشته باشیم که یک تابع در نقطهٔ $x = a$ در صورتی حد چپ یا راست دارد که حد بدست آمده، یک عدد حقیقی باشد نه موهومی.

مثال) حد تابع $f(x)$ را وقتی $x \to ۱$ بدست آورید.

$$f(x)=\begin{cases} x+۲ & x\geq ۱ \\ ۳x & x<۱ \end{cases}$$

حل)

$$f(x) \text{ حد چپ تابع}: \lim_{x\to ۱^-} f(x) = \lim_{x\to ۱^-} (۳x) = ۳\times ۱ = ۳$$

$$f(x) \text{ حد راست تابع}: \lim_{x\to ۱^+} f(x) = \lim_{x\to ۱^+} (x+۲) = ۱+۲ = ۳$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to ۱^-} f(x) = \lim_{x\to ۱^+} f(x) = ۳$$

بنابراین حد تابع فوق وقتی $x \to ۱$ برابر با ۳ می‌باشد، یعنی:

$$\lim_{x\to ۱} f(x) = ۳$$

مثال) حد توابع زیر را بدست آورید.

۱) $f(x) = \sqrt{x-۱}$ ، $x \to ۱$ وقتی

حل)

$$f(x) \text{ حد چپ تابع}: \lim_{x\to ۱^-} (\sqrt{x-۱}) = \sqrt{(۱-\varepsilon)-۱} = \sqrt{۱-\varepsilon-۱} = \sqrt{-\varepsilon} \Rightarrow$$ حد چپ ندارد (تعریف نشده).

$$f(x) \text{ حد راست تابع}: \lim_{x\to ۱^+} (\sqrt{x-۱}) = \sqrt{(۱+\varepsilon)-۱} = \sqrt{۱+\varepsilon-۱} = \sqrt{+\varepsilon} \simeq ۰ \Rightarrow$$ حد راست دارد.

تابع فوق حد چپ ندارد پس شرط برابری حد راست و چپ برقرار نمی‌باشد بنابراین می‌گوییم تابع $f(x)$

وقتی ۱ → x حد ندارد.

$$۲) f(x)=\begin{cases}\frac{1}{x-2} & x>2\\ x+1 & x<2\end{cases}$$ ، وقتی ۲ → x

حل)

$$\lim_{x\to 2^-}(x+1)=2^-+1=3$$: حد چپ تابع f(x)

$$\lim_{x\to 2^+}\left(\frac{1}{x-2}\right)=\frac{1}{2^+-2}=\frac{1}{0^+}=+\infty \Rightarrow$$: حد راست تابع f(x) حد راست ندارد.

تابع فوق حد راست ندارد پس شرط برابری حد راست و چپ برقرار نمی‌باشد بنابراین می‌گوییم تابع f(x) وقتی ۲ → x حد ندارد.

خواص حد

تعدادی از مفیدترین خاصیت‌های حد را بیان می‌کنیم، بدین منظور، فرض‌های زیر را داریم:

$$\lim_{x\to a} f(x)=A \quad , \quad \lim_{x\to a} g(x)=B$$

f(x) و g(x) دو تابع فرض می‌شوند.

$$۱) \lim_{x\to a} k=k$$

(k عدد ثابت است و حد عدد ثابت برابر خودش می‌باشد.)

$$۲) \lim_{x\to a} k f(x)=k\lim_{x\to a} f(x)$$

(k عدد ثابت است.)

$$۳) \lim_{x\to a}\left[f(x)\pm g(x)\right]=\lim_{x\to a} f(x)\pm\lim_{x\to a} g(x)=A\pm B$$

$$۴) \lim_{x\to a}\left[f(x).g(x)\right]=\lim_{x\to a} f(x).\lim_{x\to a} g(x)=A.B$$

$$۵) \lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)}=\frac{A}{B} \quad , \quad B\neq 0$$

$$۶) \lim_{x\to a}\left[f(x)\right]^n=\left[\lim_{x\to a} f(x)\right]^n=A^n$$

مثال) نشان دهید که $\lim_{x\to 1}\frac{2x^2+3x-4}{5x^3-1}=\frac{1}{4}$.

حل) طبق خاصیت شمارهٔ ۵ و استفاده از خاصیتهای ۱، ۲، ۳، ۶، داریم:

$$\lim_{x\to 1}\frac{2x^2+3x-4}{5x^3-1}=\frac{\lim_{x\to 1}(2x^2+3x-4)}{\lim_{x\to 1}(5x^3-1)}$$

از آنجا که:

$$\lim (2x^2+3x-4)=2\lim x^2+3\lim ...$$