ریاضی ۲ : کاربرد مشتق و دیفرانسیل

ریاضی کاربردی ۲

فصل اول: توابع چند متغیره < مشتق توابع چند متغیره و دیفرانسیل / کاربرد مشتق و دیفرانسیل توابع چند متغیره

فصل دوم: انتگرال و روش های انتگرال گیری

فصل سوم: ماتریس و دترمینال

فصل چهارم: دستگاه معادلات خطی

1

فصل 3: توابع چند متغیره و مشتقات جزئی

فضای n بعدی:

مجموعه تمام نقاط به فرم $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ را بطوریکه $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ باشد را فضای n بعد ناميده و بصورت زیر تعریف می کنیم

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mid x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}\}$$

توابع چند متغیره

تعریف: به تابع $f: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ با ضابطه $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = z$ تابع n متغیره می گویند. دامنه تعریف آن $\mathbb{R}^n$ و برد آن $\mathbb{R}$ است. اگر $n=2$ باشد، آن را تابع دو متغیره می گویند.

$f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$

$f(x, y, z) = x^2 y z + \sqrt{y}\, x$

$f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$

$f(x, y) = x^2 y$

مشتقات جزئی

یادآوری

فرمول‌های مشتق‌گیری

① $(x^n)' = n x^{n-1}$ $\qquad (x^4)' = 4x^3$

② $(f.g)' = f'g + g'f$ $\qquad (\sin x.\sqrt{x})' = \cos x.\sqrt{x} + \frac{1}{2\sqrt{x}}\sin x$

③ $(f/g)' = \frac{f'g - g'f}{g^2}$ $\qquad \left(\frac{x^3+5x^2}{e^x}\right)' = \frac{(3x^2+10x)e^x + (x^3+5x^2)e^x}{(e^x)^2}$

④ $(\sin u(x))' = u'(x)\cos u(x)$ $\qquad [\sin(x^2+3)]' = 2x\cos(x^2+3)$

⑤ $(\cos u(x))' = -u'(x)\sin u(x)$ $\qquad [\cos(x^6-5x^2)] = (-6x^5+10x)\sin(x^6-5x^2)$

⑥ $(\tan u(x))' = u'(x)(1+\tan^2 u(x))$

⑦ $(\cot u(x)) = -u'(x)(1+\cot^2 u(x))$

⑧ $(\ln u(x))' = \frac{u'(x)}{u(x)}$ $\qquad [\ln(x^2-2x)]' = \frac{2x-2}{x^2-2x}$

⑨ $(e^{u(x)})' = u'(x)e^{u(x)}$ $\qquad (e^{x^7}) = 7x^6 e^{x^7}$

⑩ $([f(x)]^r)' = r f'(x) . f^{r-1}(x)$ $\qquad [(x^3-5x^6)^9]' = 9(3x^2-30x^5)(x^3-5x^6)^8$

⑪ $(\sqrt{u(x)})' = \frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$ $\qquad [\sqrt{x^4+3}]' = \frac{4x^3}{2\sqrt{x^4+3}}$

$y = \sqrt[n]{u^m} = \frac{m u'(x)}{n\sqrt[n]{u^{n-m}}}$ $\qquad y = \sqrt[7]{x^5} = \frac{5x^4}{7\sqrt[7]{x^{7-5}}} = \frac{5x^4}{7\sqrt{x^2}}$

⑫ $(f \circ g)' = g' f'(g)$

$y = \sin^n u \Rightarrow y' = (n u' \cos u)\sin^{n-1} u$ $\qquad y = \sin^5 x^2 \rightarrow y' = (5 \cdot 2x \cos x^2)(\sin^4 x^2)$

مشتق جزئی یا نسبی توابع دو متغیره:

تعریف: در تابع چند متغیره $f(x_1,x_2,\dots,x_n)$ هرگاه نسبت به یک متغیر مشتق بگیریم و بقیه متغیرها را ثابت فرض کنیم، به آن مشتق جزئی تابع نسبت به آن متغیر می‌گویند.

فرض کنید $f(x,y)$ یک تابع 2 متغیره باشد، مشتقات جزئی f نسبت به x را با $f_x = \frac{\partial f}{\partial x}$ نمایش داده و برای محاسبه آن متغیر y را ثابت در نظر می‌گیریم و نسبت به x مشتق می‌گیریم. همچنین برای محاسبه مشتق جزئی f نسبت به y، آن را با $f_y = \frac{\partial f}{\partial y}$ نمایش می‌دهیم، متغیر x را ثابت گرفته و نسبت به y مشتق می‌گیریم.

مثال) مشتقات جزئی توابع زیر را محاسبه کنید.

① $f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$

$$f(x,y) = x^3y^2 + 4xy + x - 7y$$

حل: $\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2y^2 + 4y + 1$ $\qquad$ $\frac{\partial f}{\partial y} = 2x^3y + 4x - 7$

② $f(x,y,z) = x^3y^4z^5 + 2x^2y - y^2z^3$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2y^4z^5 + 4xy$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 4x^3y^3z^5 + 2x^2 - 2yz^3$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = 5x^3y^4z^4 - 3y^2z^2$$

③ $f(x,y,z) = x^2 \sin z + z \cos y$

$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x \sin z$ $\qquad$ $\frac{\partial f}{\partial y} = -z \sin y$ $\qquad$ $\frac{\partial f}{\partial z} = x^2 \cos z + \cos y$

④ $f(x,y) = e^{3x^2-5y} + \sin x$

$\frac{\partial f}{\partial x} = 6x e^{3x^2-5y} + \cos x$ $\qquad$ $\frac{\partial f}{\partial y} = -5 e^{3x^2-5y}$

Scanned by CamScanner

(5) $f(x,y)=\dfrac{\sin(x^2y^3)}{3x+4y}$

$$\begin{cases} (\sin(u))' = u' \cos u \\ (f/g)' = \dfrac{f'g-g'f}{g^2} \end{cases}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{2xy^3\cos(x^2y^3)(3x+4y)-3\sin(x^2y^3)}{(3x+4y)^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{3y^2x^2\cos(x^2y^3)(3x+4y)-4(\sin(x^2y^3))}{(3x+4y)^2}$$

تمرین کلاسی

$f(x,y,z)=e^{xyz}\cdot\sqrt{xyz}$

$f(x,y,z)=\sin(x+2y-z)$

$f(x,y)=\dfrac{x-y}{x+y}$

$f(x,y,z)=y^2-2x^2+4xz+7yz.$

(6) $f(x,y)=x^2+\ln(xy)$

$$\frac{\partial f}{\partial x}=2x+\frac{y}{xy} \qquad \frac{\partial f}{\partial y}=\frac{x}{xy}=\frac{1}{y}$$

مشتقات جزئی مراتب بالاتر

هرگاه $\frac{\partial f}{\partial x}$ و $\frac{\partial f}{\partial y}$ مشتقات جزئی مرتبه اول تابع $z=f(x,y)$ باشند مشتقات $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial x}=f_{xx}$,

$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=f_{yx}$ ، $\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial y}=f_{yy}$ ، $\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}=f_{xy}$ را در صورت وجود مشتقات جزئی مرتبه دوم تابع $f(x,y)$ می‌نویسیم.

تعریف بالا را می‌توان برای مراتب n نیز تعمیم داد.

$f(x,y)$

$f_x \qquad f_y$

$f_{xx} \quad f_{xy} \quad f_{yx} \quad f_{yy}$

$f_{xxx} \quad f_{xxy} \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots$

Scanned by CamScanner

4/

برای نشان دادن مشتق جزئی مرتبه دوم تابع $f(x,y)$ از یکی از علائم زیر استفاده می کنیم.

$$D_x(D_x f) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f_{xx}(x,y)$$

$$D_y(D_y f) = \frac{\partial^2 f}{\partial^2 y} = f_{yy}(x,y)$$

$$D_y(D_x f) = \frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x} = f_{xy}(x,y)$$

$$D_x(D_y f) = \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} = f_{yx}(x,y)$$

مثال) مشتقات مرتبه اول و دوم تابع $f(x,y) = \frac{y}{x}$ را بدست آورید.

حل: ابتدا مشتقات جزئی مرتبه اول را محاسبه می کنیم

$$f(x,y) = \frac{y}{x} = (y)\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = (y)\left(\frac{-1}{x^2}\right) = \frac{-y}{x^2} \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = (1)\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x}$$

حال مشتقات جزئی مرتبه دوم را بدست می آوریم

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{-y}{x^2}\right) = \frac{-yx-2x}{(x^2)^2} = \frac{2xy}{x^4} = \frac{2y}{x^3} = f_{xx}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{-y}{x^2}\right) = \frac{-1}{x^2} = f_{xy}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{-1}{x^2} = f_{yx}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{x}\right) = 0 = f_{yy}$$

مثال)

$f(x,y)=x^2y^3$

حل) $\dfrac{\partial f}{\partial x}=2xy^3$ $\qquad$ $\dfrac{\partial f}{\partial y}=3x^2y^2$

$\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)=\dfrac{\partial}{\partial x}(2xy^3)=2y^3$ $\qquad$ $\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)=\dfrac{\partial}{\partial x}(3x^2y^2)=6xy^2$

$\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)=\dfrac{\partial}{\partial y}(2xy^3)=6xy^2$ $\qquad$ $\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)=\dfrac{\partial}{\partial y}(3x^2y^2)=6x^2y$

مثال) در تابع زیر $\dfrac{\partial^2 f}{\partial z\partial x}$ را محاسبه کنید.

$f(x,y,z)=e^{x^2y^2z^2}$

$\dfrac{\partial^2 f}{\partial z\partial x}=\dfrac{\partial}{\partial z}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)$ $\qquad$ $\dfrac{\partial f}{\partial x}=?$

$\dfrac{\partial f}{\partial x}=2xy^2z^2\,e^{x^2y^2z^2}$

$\dfrac{\partial}{\partial z}\left(2xy^2z^2e^{x^2y^2z^2}\right)=\dfrac{\partial}{\partial z}\left(2xy^2z^2\right)\left(e^{x^2y^2z^2}\right)$

$=4xy^2z\times e^{x^2y^2z^2}+2x^2y^2z\,e^{x^2y^2z^2}\times 2xy^2z^2$

تمرین 1: در تابع زیر $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial x}$ را محاسبه کنید.

$f(x,y)=\sin(4x+y^3)$

تمرین 2: مشتقات جزئی مرتبه دوم تابع زیر را محاسبه کنید.

$f(x,y)=e^{3x^2-5y}+\sin x$

$f(x,y)=x^3+3x^2y+y^2-4y^3$

دیفرانسیل کل تابع

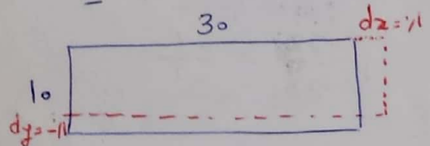
تعریف: اگر $f(x,y)$ یک تابع دو متغیره باشد دیفرانسیل کل آن به صورت زیر تعریف می‌شود که با df نشان می‌دهند.

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy$$

به همین ترتیب دیفرانسیل کل تابع n متغیره $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ عبارت است از

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}dx_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}dx_n.$$

مثال) اگر در مستطیلی به طول ۳۰ و عرض ۱۰ سانتی‌متر، طول به اندازه ۰/۱ سانتی‌متر اضافه شود و عرض آن به اندازه ۰/۱ سانتی‌متر کم شود میزان تغییرات مساحت را محاسبه کنید.



حل) $f(x,y) = xy \qquad dx = 0.1 \qquad dy = -0.1$

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy$$

$$df = y\,dx + x\,dy = (10)(0.1) + (30)(-0.1) = 1 - 3 = -2$$

به اندازه ‎-2 سانتی‌متر مساحت کاهش پیدا کرده.

تمرین: دیفرانسیل کل تابع $f(x,y) = xye^{xy}$ را بدست آورید.

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy$$

$$= (ye^{xy} + xy^2e^{xy})dx + (xe^{xy} + x^2ye^{xy})dy$$

تمرین: دیفرانسیل کل تابع‌های زیر را حساب کنید.

الف) $f(x,y) = \ln(x^2y + 4x)$

ب) $g(x,y,z) = x^2y^2z^3 + \sin(xz^4)$

مشتق تابع مرکب و قاعده زنجیری

اگر $z=f(x,y)$ به طوری که $x=g(r,s)$ و $y=h(r,s)$ آنگاه داریم

$$\frac{\partial z}{\partial r}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r}$$

$$\frac{\partial z}{\partial s}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s}$$

اگر $x=x(t)$ و $y=y(t)$ آنگاه رابطه فوق به صورت زیر نوشته می‌شود.

$$\frac{\partial z}{\partial t}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}$$

مثال) اگر $z=x^2(\sqrt{y}+5)$ ، $x=r^2+\frac{1}{s}$ ، $y=3r^4+\sqrt{s}$ ، $\frac{\partial z}{\partial r}$ و $\frac{\partial z}{\partial s}$ را بیابید.

$$\frac{\partial z}{\partial x}=2x(\sqrt{y}+5) \qquad \frac{\partial x}{\partial r}=2r \qquad \frac{\partial x}{\partial s}=\frac{-1}{s^2}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{x^2}{2\sqrt{y}} \qquad \frac{\partial y}{\partial r}=12r^3 \qquad \frac{\partial y}{\partial s}=\frac{1}{2\sqrt{s}}$$

$$\frac{\partial z}{\partial r}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r}=\left(2x(\sqrt{y}+5)\right)(2r)+\left(\frac{x^2}{2\sqrt{y}}\right)(12r^3)$$

$$\frac{\partial z}{\partial s}=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial s}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial s}=(2x)(\sqrt{y}+5)\left(\frac{-1}{s^2}\right)+\left(\frac{x^2}{2\sqrt{y}}\right)\left(\frac{1}{2\sqrt{s}}\right)$$

مثال) اگر $u=x^4\ln(7+y)$ و $x=t^4-3$ ، $y=\frac{t^5}{5}+6$ ، $\frac{du}{dt}$ را بدست آورید.

$$\frac{\partial u}{\partial x}=4x^3\ln(7+y) \qquad \frac{dx}{dt}=4t^3$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{x^4}{7+y} \qquad \frac{dy}{dt}=t^4$$

6)
$$\frac{du}{dt}=\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt}+\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt}=(4x^3\ln(7+y))(4t^3)+\left(\frac{x^4}{7+y}\right)t^4$$

$$\frac{du}{dt}=4(t^4-3)\ln\left(13+\frac{t^5}{5}\right)(4t^3)+\left(\frac{(t^4-3)^4}{13+\frac{t^5}{5}}\right)(t^4)$$

$\frac{du}{dt}$ را مشتق کل تابع f نسبت به متغیر t می‌گویند.

تمرین: مشتق کل تابع f نسبت به t زمانی که $f(x,y)=\ln(x^2y^3+5y)$ و $x=\sqrt{t}$ ، $y=5t^3$ را محاسبه کنید.

$$\frac{df}{dt}=\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt}+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt}=??$$

مشتق تابع ضمنی

اگر $F(x,y)=0$ یک تابع ضمنی یک متغیره باشد که در آن $y=f(x)$ ، آنگاه مشتق آن بصورت

$$\frac{\partial y}{\partial x}=-\frac{\partial f/\partial x}{\partial f/\partial y}$$

روبه رو تعریف می‌شود.

به عنوان مثال $x^2+y^2-1=0$ معادله دایره یک تابع ضمنی می‌باشد.

همچنین اگر $F(x,y,z)=0$ و $z=z(x,y)$ یک تابع ضمنی دو متغیره باشد، مشتق آن بصورت زیر

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{\partial f/\partial x}{\partial f/\partial z}\quad,\quad\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{\partial f/\partial y}{\partial f/\partial z}$$

می‌باشد.

مثال) اگر $f(x,y)=x^3+y^3-3axy=0$ ، $\frac{\partial y}{\partial x}$ را بیابید.

حل: دقت کنید $f(x,y)=0$ است بنابراین f یک تابع ضمنی می‌باشد بنابراین با استفاده از فرمول

$$\frac{\partial y}{\partial x}=-\frac{\partial f/\partial x}{\partial f/\partial y}$$

مشتق آن را می‌یابیم.

$$\frac{\partial y}{\partial x}=-\frac{\partial f/\partial x}{\partial f/\partial y}=\frac{-(3x^2-3ay)}{3y^2-3ax}=\frac{ay-x^2}{y^2-ax}$$

مثال) تابع $ze^x+e^y-ye^z=0$ مفروض است. $\frac{\partial z}{\partial x}$ و $\frac{\partial z}{\partial y}$ را بیابید.

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{-\partial F/\partial x}{\partial F/\partial z}=\frac{e^y-ye^z}{e^x-ye^z} \quad \text{f} \quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{-\partial f/\partial y}{\partial f/\partial z}=\frac{e^z-e^y}{e^x-ye^z}$$

$$\partial f/\partial x=ze^x=ye^z-e^y \qquad \partial f/\partial y=e^y-e^z$$

$$\partial f/\partial z=e^x-ye^z$$

مثال) اگر $z\sin x+z^2+x\sin y+xyz=0$ مشتق‌های جزئی $\frac{\partial y}{\partial x}$ و $\frac{\partial z}{\partial x}$ را بدست می‌آوریم.

$$\frac{\partial y}{\partial x}=\frac{-\partial f/\partial x}{\partial f/\partial y}=-\frac{z\cos x+\sin y+yz}{x\cos y+xz}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{\partial f/\partial x}{\partial f/\partial z}=-\frac{z\cos x+\sin y+yz}{\sin x+2z+xy}$$

مثال) اگر $\sin xy=-e^{xyz}+1$ و $z=z(x,y)$ ، در این صورت مشتق $\frac{\partial z}{\partial x}$ و $\frac{\partial z}{\partial y}$ را بیابید.

حل:
$$F(x,y,z)=\sin xy+e^{xyz}-1=0$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{-\partial f/\partial x}{\partial f/\partial z}=-\frac{y\cos xy+yze^{xyz}}{xye^{xyz}}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{-\partial f/\partial y}{\partial f/\partial z}=-\frac{x\cos xy+xze^{xyz}}{xye^{xyz}}$$

اکسترمم (ماکزیمم و مینیمم) نسبی توابع چند متغیره

تعریف: تابع n متغیره $z=f(x_1,x_2,\dots,x_n)$ را در نظر بگیرید. نقاطی که به ازای آنها $f_{x_1}=f_{x_2}=\dots=f_{x_n}=0$ یا نقاطی که $f_{x_1}, f_{x_2}, \dots, f_{x_n}$ وجود ندارد را نقاط بحرانی تابع z گوییم.

مثال) نقاط بحرانی توابع زیر را بیابید.

الف) $z=x^3-y^3-3x^2-9x+3y$

$$z_x=3x^2-6x-9=0$$

$$\Rightarrow \Delta=b^2-4ac=36-4(3)(-9)=36+118=144$$

$$x_1,x_2=\frac{+6\pm12}{6} \rightarrow x_1=3, \quad x_2=-1$$

$$z_y=-3y^2+3=0 \Rightarrow y^2=1 \Rightarrow y=\pm1$$

نقاط بحرانی عبارت است از

$$(3,1),\ (3,-1),\ (-1,1),\ (-1,-1)$$

ب) $z=e^{(x-1)^2+y^2+4y}$

$$z_x=2(x-1)e^{(x-1)^2+y^2+4y}=0 \Rightarrow \boxed{x=1}$$

$$z_y=2y+4e^{(x-1)^2+y^2+4y}=0 \Rightarrow 2y+4=0 \Rightarrow y=-2$$

نقطه بحرانی $(1,-2)$ می‌باشد.

تعریف: تابع $f(x,y)$ در (x,y) دارای ماکزیمم نسبی است هرگاه

$$\forall h,k\in\mathbb{R};\ f(x+h,y+k)\le f(x,y)$$

و دارای مینیمم نسبی است هرگاه

$$\forall h,k\in\mathbb{R};\ f(x+h,y+k)\ge f(x,y)$$

اکسترمم نسبی

برای تعیین نقاط اکسترمم تابع $z=f(x,y)$ مراحل زیر را انجام می دهیم.

الف) معادلات $f_x(x,y)=0$ و $f_y(x,y)=0$ را حل می کنیم (نقاط بحرانی را بدست می آوریم)

ب) حاصل دترمینان $\Delta=\begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{vmatrix}$ را به ازای نقاط بحرانی محاسبه می کنیم.

ج) اگر $\Delta>0$ و $f_{xx}<0$ (یا $f_{yy}<0$) نقطه بحرانی ماکزیمم نسبی است.

- اگر $\Delta>0$ و $f_{xx}>0$ (یا $f_{yy}>0$) نقطه بحرانی مینیمم نسبی است.

- اگر $\Delta<0$، نقطه بحرانی از نوع زینی است یا به عبارتی تابع f اکسترمم نسبی ندارد.

- در غیر این صورت با استفاده از رفتار تابع در همسایگی نقطه بحرانی، نوع نقطه را تعیین می کنیم.
اگر $\Delta=0$ باشد این آزمون نتیجه نمی دهد.

مثال) اکسترمم نسبی تابع $f(x,y)=x^3+y^3-3x-12y+20$ را بدست آورید.

$$f_x=\frac{\partial f}{\partial x}=3x^2-3=0 \Rightarrow x^2=\pm 1$$

$$f_y=\frac{\partial f}{\partial y}=3y^2-12=0 \Rightarrow y^2=4 \Rightarrow y=\pm 2$$

نقاط بحرانی عبارت اند از: $P_1(1,2)$ ، $P_2(1,-2)$ ، $P_3(-1,2)$ ، $P_4(-1,-2)$

$$f_{xx}=6x \qquad f_{yy}=6y \qquad f_{xy}=0$$

$$\Delta=\begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 6x & 0 \\ 0 & 6y \end{vmatrix}=36xy$$

وضعیت چهار نقطه را با استفاده از مشتقات دوم بدست می آوریم.

$\Delta(1,2)=36(1)(2)=72>0$; $f_{xx}=6\times 1=6>0$ مینیمم

$\Delta(1,-2)=-72<0$ اکسترمم ندارد (نقطه زینی) $\Delta(-1,2)=-72<0$ اکسترمم ندارد (نقطه زینی)

$\Delta(-1,-2)=72>0$ $f_{xx}=6\times(-1)=-6<0$ ماکزیمم.

۷

انتگرال و روش‌های انتگرال‌گیری

تعریف

انتگرال‌گیری دارای دو تعبیر متمایز است، به تعبیر نخستین، انتگرال‌گیری روش معکوس مشتق‌گیری است و به تعبیر دوم، روشی است برای تعیین مساحت زیر یک منحنی. در هر یک از این زمینه‌ها انتگرال دارای کاربرد مهمی است.

انتگرال بعنوان یک عمل، عکس مشتق‌گیری است، از این رو اگر از تابعی ابتدا مشتق بگیریم و از حاصل آن مجدداً انتگرال بگیریم به همان تابع اولیه خواهیم رسید. البته این نتیجه تنها زمانی کاملاً صحیح خواهد بود که به طریقی، ثابت انتگرال‌گیری را مشخص کنیم. در غیر اینصورت نتیجه با تابع اولیه در یک ثابت، متفاوت خواهد بود. در این حالت، انتگرال‌گیری تعیین تابعی است که مشتق (یا نرخ تغییر) آن معلوم است.

تعریف تابع اولیه: هرگاه تابع $f(x)$ تابعی پیوسته بر بازه (a,b) باشد، اگر تابع $F(x)$ در رابطه $F'(x)=f(x)$ صدق کند، $F(x)$ را یک تابع اولیه $f(x)$ می‌نامند.

انتگرال نامعین

بنا برای $F(x)+C$ که C هر عدد ثابت دلخواه می‌تواند باشد یک تابع اولیه $f(x)$ می‌شود

تابع $F(x)$ را در نظر می‌گیریم، اگر مشتق تابع $F(x)$ برابر با $f(x)$ باشد، طبق تعریف به $F(x)$ انتگرال نامعین یا آنتی مشتق یا تابع اولیهٔ $f(x)$ می‌گویند و آنرا بصورت زیر نشان می‌دهند.

انتگرال نامعین را

$$\int f(x)dx = F(x)+C$$

که در آن، نماد $\int f(x)dx$، انتگرال $f(x)$ نسبت به x خوانده می‌شود. در اینجا نماد $\int$ را علامت انتگرال (کشیدهٔ اولین حرف Sum)، $f(x)$ را انتگراند، $F(x)$ را یک انتگرال خاص، C را ثابت انتگرال‌گیری و $F(x)+C$ را انتگرال نامعین می‌نامند. توجه شود که اگر $F(x)$ یک انتگرال $f(x)$ نسبت به x باشد، $F(x) + C$

نیز که در آن C ثابتی دلخواه است، انتگرال تابع مذکور خواهد بود، زیرا مشتق مقدار ثابت برابر با صفر است.

$$\frac{d}{dx}\left[F(x)+C\right]=\frac{dF(x)}{dx}+\frac{dC}{dx}=f(x)+0=f(x)$$

از آنجائیکه مشتق و انتگرال، دو عمل عکس یکدیگرند بنابراین اغلب قواعدی که در مورد مشتق وجود دارد در انتگرال هم معتبر است.

خواص انتگرال نامعین

(۱) مشتق انتگرال $\int f(x)dx$ برابر است با خود تابع $f(x)$ یعنی:

$$\frac{d}{dx}\left[\int f(x)dx\right]=f(x)$$

مثال)

$$\frac{d}{dx}\int\frac{1}{x}dx=\frac{1}{x}$$

(۲)

$$d\int f(x)dx=f(x)dx$$

(۳) اگر $f(x)$ و $g(x)$ دو تابع یا رابطه باشند دراینصورت:

$$\int\left[f(x)\pm g(x)\right]dx=\int f(x)dx\pm\int g(x)dx$$

مثال)

$$\int(x^3-x^2)dx=\int x^3dx-\int x^2dx$$

(۴) توجه خواهیم داشت که: (در حالت کلی)

$$\int f(x).g(x)dx\neq\int f(x)dx.\int g(x)dx$$

و همچنین:

$$\int\frac{f(x)}{g(x)}dx\neq\frac{\int f(x)dx}{\int g(x)dx}$$

(۵)

$$\int af(x)dx=a\int f(x)dx \quad , \quad a\in R$$

مثال)

$$\int 4x^2dx=4\int x^2dx$$

(۶) **انتگرال دوگانه:** همانند مشتق که در آن، مشتق مراتب بالاتر (مرتبهٔ دوم، ...) را محاسبه می‌کردیم، در انتگرال نیز می‌توان انتگرال مراتب بالاتر (دوگانه، ...) را محاسبه نمود.

اگر $\int f(x)dx=F(x)+C$ باشد دراینصورت خواهیم داشت:

$$\int\int f(x)dx^2=\int(F(x)+C)dx$$

که در آن، نماد $\int\int$ انتگرال دوگانه را نشان می‌دهد.

مثال) می‌دانیم که $(\frac{x^3}{3})' = x^2$ است، پس: $\int\int x^2dx^2 = \int[(\frac{x^3}{3}) + C]dx$

فرمولهای انتگرال‌گیری (انتگراسیون)

محاسبه انتگرال نامعین و مشتق‌گیری، دو عمل عکس یکدیگرند. فرض می‌کنیم:

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

در اینصورت می‌توان نوشت:

$$F(x) + C \underset{\text{انتگرال‌گیری (محاسبهٔ تابع اولیه)}}{\overset{\text{مشتق‌گیری}}{\rightleftarrows}} f(x)$$

یعنی اگر تابع $F(x) + C$ معلوم باشد طبق قوانین مشتق، با مشتق‌گیری، به $f(x)$ خواهیم رسید اما اگر $f(x)$ معلوم باشد و بخواهیم $F(x) + C$ یا تابع اولیهٔ $f(x)$ را تعیین کنیم باید در جستجوی تابعی باشیم که مشتق آن یعنی $f(x)$ معلوم است. بوسیلهٔ این خاصیت، برخی از فرمولهای انتگرال‌گیری بدست می‌آید که اهم این فرمولها به شرح زیر می‌باشد:

۱ـ انتگرال توابع جبری

$$\boxed{\int adx = ax + C \qquad , \quad a \in R \qquad (1)}$$

مثال) $\int 3dx = 3x + C$

مثال) $\int 0dx = 0x + C = C$

$$\boxed{\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \qquad , \quad n \in R, n \neq -1 \quad (2)}$$

مثال) $\int x^5 dx = \frac{x^{5+1}}{5+1} + C = \frac{x^6}{6} + C$

مثال) $\int \frac{1}{x^3}dx = \int x^{-3}dx = \frac{x^{-3+1}}{-3+1} + C = \frac{x^{-2}}{-2} + C = -\frac{1}{2x^2} + C$

مثال) $\int \sqrt[3]{x^2}dx = \int x^{\frac{2}{3}}dx = \frac{x^{\frac{2}{3}+1}}{\frac{2}{3}+1} + C = \frac{x^{\frac{5}{3}}}{\frac{5}{3}} + C = \frac{3}{5}x^{\frac{5}{3}} + C = \frac{3\sqrt[3]{x^5}}{5} + C$

$$\int x^{-1}dx = \text{Ln}\,|x| + C = \int \frac{1}{x}dx \quad (۳)$$

مثال)

$$\int \frac{dx}{x} = \int \frac{1}{x}dx = \int x^{-1}dx = \text{Ln}\,|x| + C$$

$$\int (ax+b)^n dx = \frac{(ax+b)^{n+1}}{a(n+1)} + C \quad , \quad a,b \in R \ , \ n \neq -1 \quad (۴)$$

مثال)

$$\int (2x+5)^3 dx = \frac{(2x+5)^{3+1}}{2(3+1)} + C = \frac{(2x+5)^4}{8} + C$$

مثال)

$$\int \left(\frac{x}{2} - \frac{1}{3}\right)^4 dx = \frac{\left(\frac{x}{2} - \frac{1}{3}\right)^{4+1}}{\frac{1}{2}(4+1)} + C = \frac{\left(\frac{x}{2} - \frac{1}{3}\right)^5}{\frac{5}{2}} + C = \frac{2\left(\frac{x}{2} - \frac{1}{3}\right)^5}{5} + C$$

$$\int (ax+b)^{-1} dx = \frac{1}{a}\text{Ln}\,|ax+b| + C \quad , \quad a,b \in R \quad (۵)$$

مثال)

$$\int \frac{dx}{-3x+7} = \int \frac{1}{-3x+7}dx = \int (-3x+7)^{-1}dx = \frac{1}{-3}\text{Ln}\,|-3x+7| + C$$

۲ـ انتگرال توابع مثلثاتی

$$\int \sin kx\,dx = -\frac{\cos kx}{k} + C \quad , \quad k \in R \quad (۶)$$

مثال)

$$\int \sin x\,dx = -\frac{\cos x}{1} + C = -\cos x + C$$

مثال)

$$\int \sin 4x\,dx = -\frac{\cos 4x}{4} + C$$

مثال)

$$\int -3\sin\sqrt{2}x\,dx = -3\int \sin\sqrt{2}x\,dx = -3\left(-\frac{\cos\sqrt{2}x}{\sqrt{2}}\right) + C = \frac{3\cos\sqrt{2}x}{\sqrt{2}} + C$$

$$\int \cos kx\,dx = \frac{\sin kx}{k} + C \quad , \quad k \in R \quad (۷)$$

مثال)

$$\int \cos x\,dx = \frac{\sin x}{1} + C = \sin x + C$$

$$\int \frac{dx}{\cos^n cx} = \frac{\sin cx}{c(n-1)\cos^{n-1} cx} + \frac{(n-2)}{(n-1)} \int \frac{dx}{\cos^{n-2} cx}$$

مثال) $\int \cos 3x\,dx = \frac{\sin 3x}{3} + C$

مثال) $\int \frac{2}{3}\cos 9x\,dx = \frac{2}{3}\int \cos 9x\,dx = \frac{2}{3}\left(\frac{\sin 9x}{9}\right) + C = \frac{2\sin 9x}{27} + C$

$$\boxed{\int (1+\mathrm{tg}^2 kx)\,dx = \frac{\mathrm{tg}\,kx}{k} + C \quad , \quad k\in R \quad (8)}$$

مثال) $\int (1+\mathrm{tg}^2 x)\,dx = \frac{\mathrm{tg}\,x}{1} + C = \mathrm{tg}\,x + C$

مثال) $\int (1+\mathrm{tg}^2 5x)\,dx = \frac{\mathrm{tg}\,5x}{5} + C$

$$\boxed{\int (1+\mathrm{cotg}^2 kx)\,dx = -\frac{\mathrm{cotg}\,kx}{k} + C \quad , \quad k\in R \quad (9)}$$

مثال) $\int (1+\mathrm{cotg}^2 x)\,dx = -\frac{\mathrm{cotg}\,x}{1} + C = -\mathrm{cotg}\,x + C$

مثال) $\int (1+\mathrm{cotg}^2 2x)\,dx = -\frac{\mathrm{cotg}\,2x}{2} + C$

اگر u تابعی مشتق‌پذیر از x باشد، خواهیم داشت:

$$\boxed{\int \mathrm{tg}\,u\,du = -\mathrm{Ln}\,|\cos u| + C \qquad (10)}$$

$$\boxed{\int \mathrm{cotg}\,u\,du = \mathrm{Ln}\,|\sin u| + C \qquad (11)}$$

مثال) $\int \mathrm{tg}\,2x\,dx = -\frac{1}{2}\mathrm{Ln}\,|\cos 2x| + C$

مثال) $\int (\mathrm{tg}\,x + \mathrm{cotg}\,x)\,dx = \int \mathrm{tg}\,x\,dx + \int \mathrm{cotg}\,x\,dx = -\mathrm{Ln}\,|\cos x| + \mathrm{Ln}\,|\sin x| + C$

۳ـ انتگرال توابع معکوس مثلثاتی

$$\boxed{\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \mathrm{Arcsin}\frac{x}{a} + C \quad \left|\frac{x}{a}\right| \le 1 \quad , \quad a\in R \quad (12)}$$

از طرفی می‌دانیم: $\mathrm{Arcsin}\frac{x}{a} = \sin^{-1}\frac{x}{a}$

مثال) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \mathrm{Arcsin}\frac{x}{1} + C = \mathrm{Arcsin}\,x + C$

$\int \frac{dx}{\cos cx} = \frac{1}{c} Ln \left|\tan\left(\frac{cx}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right|$

مثال) $\int \left(\frac{1}{\sqrt{9-x^2}} + x^3\right)dx = \int \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}} + \int x^3 dx = Arcsin\frac{x}{3} + \frac{x^4}{4} + C$

$$\boxed{\int \frac{-dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = Arccos\frac{x}{a} + C \quad \left|\frac{x}{a}\right| \le 1 \quad , \quad a\in R} \quad (۱۳)$$

از طرفی می‌دانیم: $Arccos\frac{x}{a} = \cos^{-1}\frac{x}{a}$

مثال) $\int -\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = Arccos\frac{x}{1} + C = Arccos x + C$

مثال) $\int \left(\frac{1}{\sqrt{16-x^2}} - \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}\right)dx = \int \frac{dx}{\sqrt{16-x^2}} + \int \frac{-dx}{\sqrt{4-x^2}} = Arcsin\frac{x}{4} + Arccos\frac{x}{2} + C$

$$\boxed{\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a} Arctg\frac{x}{a} + C \quad , \quad a\in R} \quad (۱۴)$$

از طرفی می‌دانیم: $Arctg\frac{x}{a} = tg^{-1}\frac{x}{a}$

مثال) $\int \frac{dx}{4+x^2} = \frac{1}{2} Arctg\frac{x}{2} + C$

$$\boxed{\int \frac{-dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a} Arccotg\frac{x}{a} + C \quad , \quad a\in R} \quad (۱۵)$$

از طرفی می‌دانیم: $Arccotg\frac{x}{a} = cotg^{-1}\frac{x}{a}$

مثال) $\int -\frac{1}{1+x^2} dx = \frac{1}{1} Arccotg\frac{x}{1} + C = Arccotg x + C$

مثال) $\int -\frac{5dx}{4+x^2} = 5\int \frac{-dx}{4+x^2} = 5\left(\frac{1}{2} Arccotg\frac{x}{2}\right) + C$

۴ـ انتگرال توابع نمایی

$$\boxed{\int a^{nx}dx = \frac{a^{nx}}{nLna} + C \quad , \quad a,n\in R} \quad (۱۶)$$

مثال) $\int 3^{2x}dx = \frac{3^{2x}}{2Ln3} + C$

$$\boxed{\int e^{nx}dx = \frac{1}{n}e^{nx} + C \quad , \quad n\in R} \quad (۱۷)$$

مثال) $\int e^{-2x}dx = \frac{1}{-2}e^{-2x} + C$